



**TUGAS AKHIR – SM141501**

**KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA  
DENGAN ALIRAN NUTRISI DAN KARBONDIOKSIDA  
SEBAGAI VARIABEL KENDALI MENGGUNAKAN METODE  
LQR**

**YOSHUA ARDY PUTRA  
06111340000114**

**Dosen Pembimbing :  
Dr. Dra. Mardlijah, M.T  
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2018**



**FINAL PROJECT– SM141501**

**OPTIMAL CONTROL ON ALGAE GROWTH MODEL WITH  
NUTRITION AND CARBON DIOXIDE FLOW AS VARIABLE  
CONTROL USING LQR METHOD**

**YOSHUA ARDY PUTRA**

**06111340000114**

**Supervisors :**

**Dr. Dra. Mardlijah, M.T**

**Drs. Lukman Hanafi, M.Sc**

**Department of Mathematics**

**Faculty of Mathematics, Computations, and Data Sciences**

**Sepuluh Nopember Institute of Technology**

**Surabaya 2018**

# LEMBAR PENGESAHAN

## KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA DENGAN ALIRAN NUTRISI DAN KARBONDIOKSIDA SEBAGAI VARIABEL KENDALI MENGGUNAKAN METODE LQR

### *OPTIMAL CONTROL ON ALGAE GROWTH MODEL WITH NUTRITION AND CARBON DIOXIDE FLOW AS VARIABLE CONTROL USING LQR METHOD*

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada

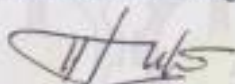
Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

YOSHUA ARDY PUTRA  
NRP. 06111340000114

Menyetujui,

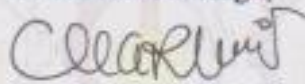
Dosen Pembimbing II,



Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

NIP. 19640824 198803 1 001

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dra. Mardijah, M.T

NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika  
FMKSD ITS



Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Januari 2018

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***

**KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN  
ALGA DENGAN ALIRAN NUTRISI DAN KARBON  
DIOKSIDA SEBAGAI VARIABEL KENDALI  
MENGUNAKAN METODE LQR**

Nama : Yoshua Ardy Putra  
NRP : 06111340000114  
Departemen : Matematika FMKSD-ITS  
Dosen Pembimbing : 1. Dr. Dra. Mardlijah, M.T  
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

**ABSTRAK**

*Saat ini sudah banyak pemanfaatan mikroalga dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu penggunaan mikroalga adalah sebagai penghasil sumber energi. Mikroalga merupakan salah satu jenis tumbuhan yang dapat dijadikan sebagai sumber energi yang mempunyai minyak nabati untuk diolah menjadi biodiesel yang ramah lingkungan untuk memenuhi kebutuhan energi yang terbatas di lingkungan sekitar, sehingga dapat menggantikan kebutuhan minyak bumi yang sangat terbatas ketersediaannya.*

*Penelitian ini menggunakan model Thornton sebagai referensi. Agar dihasilkan mikroalga yang optimal, peneliti memaksimalkan konsentrasi alga kering sebagai fungsi tujuan dan melakukan kendali optimal pada aliran nutrisi dan karbon dioksida yang masuk sebagai variabel kendali. Setelah dilakukan kontrol optimal menggunakan metode LQR dengan matriks bobot kontrol  $R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , konsentrasi alga kering meningkat sebesar 7,32%.*

**Kata kunci** : Mikroalga, biodiesel, LQR (Linear Quadratic Regulator)

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***

# ***OPTIMAL CONTROL ON ALGAE GROWTH MODEL WITH NUTRITION AND CARBON DIOXIDE FLOW AS VARIABLE CONTROL USING LQR METHOD***

*Name* : Yoshua Ardy Putra  
*NRP* : 06111340000114  
*Department* : Mathematics FMKSD-ITS  
*Supervisors* : 1. Dr. Dra. Mardlijah, M.T  
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

## ***ABSTRACT***

*At this time has been a lot of utilization microalgae in everyday life. One of the use of microalgae is as a source of energy. Microalgae is one of plant type that can be used as a source of energy that has vegetable oil to be used processed into enviromentally friendly biodiesel to meet the limited energy needs in the surrounding environment,so it can replace petroleum needs are very limited availability.*

*In this research, the authors use Thornton model as a reference. In order for microalgae to produce a good source of energy, the researcher maximize the concentration of dry algae as objective function and optimal control on the flow of nutrients and carbon dioxide as a control variable. After optimal control using LQR method with control weighting  $R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , dry algae concentration increased by 7.32%.*

***Keywords:*** *miroalgae,LQR,biodiesel*

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***



## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas berkat dan penyertaanNya penulis dapat menyelesaikan penulisan Tugas Akhir yang berjudul **“KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA DENGAN ALIRAN NUTRISI DAN KARBONDIOKSIDA SEBAGAI VARIABEL KENDALI MENGGUNAKAN METODE LQR”**. Tugas Akhir ini tentu tidak sempurna, oleh karena itu penulis memohon maaf jika terdapat kesalahan. Masukan dan kritik sangat berguna sebagai bahan evaluasi untuk penulis. Tulisan ini juga tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu pada kesempatan ini penulis juga mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA ITS
2. Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T dan Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc selaku dosen pembimbing Tugas Akhir, atas waktu dan bimbingan yang diberikan kepada penulis
3. Bapak Dr. Darmaji, S.Si, M.T selaku dosen wali dan kepada seluruh dosen dan karyawan Departemen Matematika ITS
4. Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si, Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, Bapak Drs. Kamiran, M.Si untuk saran dan masukan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Ardi Firmansyah, Firdaus, Prima alumni S1 Matematika ITS yang telah memberikan pencerahan dalam penulisan
6. Kedua orangtua, Bapak Suhardi dan Ibu Rusmini, saudara sekandung Calleb atas kepercayaan dan dukungan moril yang selalu diberikan
7. Sahabat terkasih, Brigita dan keluarga atas doa, kasih dan perhatian yang memotivasi penulis

8. Ilham, Tri Nur, Refina, Clarissa, Sharah, Andri, Wahyu, Ganjar, Sando atas dukungan semangat dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.
9. Teman-teman seperjuangan 117
10. Teman-teman Lambda 13 dan Matematika ITS angkatan 2013

Penulis sangat berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, lingkungan, perusahaan transportasi penerbangan dan bagi siapapun yang membutuhkan.

Surabaya, Desember 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

	Hal
LEMBAR PENGESAHAN.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
ABSTRAK .....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR TABEL .....	xvii
DAFTAR GAMBAR .....	xix
BAB I .....	1
PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang Masalah.....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	4
1.3. Batasan Masalah.....	5
1.4. Tujuan .....	5
1.5. Manfaat Penelitian.....	5
1.6. Sistematika Penulisan.....	6
BAB II .....	7
TINJAUAN PUSTAKA.....	7
2.1. Definisi Alga dan Jenisnya.....	7
2.2. Model Matematika Pertumbuhan Alga .....	8
2.3. Titik Keseimbangan .....	11
2.4. Analisa Kestabilan.....	11
2.5. Keterkontrolan Sistem.....	15

2.6. Linier Quadratic Regulator.....	15
2.7. Hubungan Aljabar Ricatti Dengan Gain Regulator .....	16
2.8. Penelitian Terdahulu.....	17
BAB III.....	19
METODOLOGI PENELITIAN .....	19
3.1. Metode penelitian .....	19
BAB IV.....	23
ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....	23
4.1 Model Pertumbuhan Alga.....	23
4.2 Titik Setimbang .....	23
4.3 Analisa Kestabilan.....	27
4.4 Analisa keterkontrolan.....	33
4.5 Perancangan kendali LQR.....	36
4.6 Simulasi dan Analisis Hasil Kontrol .....	41
4.6.1. Hasil Simulasi Sebelum Diberi Kendali .....	41
4.6.2. Hasil Simulasi Setelah Diberi Kendali .....	45
4.7 Pengaruh Perubahan Matriks $R_c$ Pada Sistem.....	54
BAB V .....	59
KESIMPULAN DAN SARAN .....	59
5.1. Kesimpulan.....	59
5.2. Saran.....	60
DAFTAR PUSTAKA.....	61
LAMPIRAN A .....	63
LAMPIRAN B.....	65

LAMPIRAN C .....	67
BIODATA .....	69

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***

## **DAFTAR TABEL**

<b>Tabel 2. 1 Nilai Parameter.....</b>	<b>11</b>
--	-----------

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***



## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 4. 1</b> Perubahan jumlah konsentrasi pada pertumbuhan alga dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.4, 10, 5)$ ...	41
<b>Gambar 4. 2</b> Perubahan jumlah konsentrasi pada pertumbuhan alga dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ .	43
<b>Gambar 4. 3</b> Perubahan jumlah konsentrasi pada pertumbuhan alga dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$ ....	44
<b>Gambar 4. 4</b> Perubahan jumlah konsentrasi alga kering dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ .....	46
<b>Gambar 4. 5</b> Perubahan jumlah konsentrasi alga kering dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$ .....	47
<b>Gambar 4. 6</b> Perubahan jumlah alga kering dengan dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.4, 10, 5)$ .....	48
<b>Gambar 4. 7</b> Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ .....	49
<b>Gambar 4. 8</b> Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$ .....	49
<b>Gambar 4. 9</b> Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.4, 10, 5)$ .....	50
<b>Gambar 4. 10</b> Perubahan jumlah konsentrasi glukosa dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ .....	50
<b>Gambar 4. 11</b> Perubahan jumlah konsentrasi glukosa dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$ .....	51
<b>Gambar 4. 12</b> Perubahan jumlah konsentrasi glukosa dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.4, 10, 5)$ .....	51
<b>Gambar 4. 13</b> Perubahan jumlah konsentrasi karbondioksida dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ .....	52
<b>Gambar 4. 14</b> Perubahan jumlah konsentrasi karbondioksida dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$ .....	52
<b>Gambar 4. 15</b> Perubahan jumlah konsentrasi karbondioksida dengan kondisi awal $(A_0, M_0, S_0, C_0) = (3, 0.4, 10, 5)$ .....	52

**Gambar 4. 16** Aliran nutrisi dan aliran karbondioksida kondisi awal ( $A_0, M_0, S_0, C_0$ ) = (3, 0.6, 15, 7.5) .....53

**Gambar 4. 17** aliran nutrisi dan aliran karbondioksida kondisi awal ( $A_0, M_0, S_0, C_0$ ) = (3, 0.2, 5, 2.5).....53

**Gambar 4. 18** aliran nutrisi dan aliran karbondioksida kondisi awal ( $A_0, M_0, S_0, C_0$ ) = (3, 0.2, 5, 2.5).....54

**Gambar 4. 19** jumlah konsentrasi alga kering.....55

**Gambar 4. 20** jumlah konsentrasi alga kering.....55

**Gambar 4. 21** jumlah konsentrasi alga kering.....55

**Gambar 4. 22** jumlah konsentrasi alga kering.....56

**Gambar 4. 23** jumlah konsentrasi alga kering.....56

**Gambar 4. 24** jumlah konsentrasi alga kering.....56

**Gambar 4. 25** jumlah konsentrasi alga kering.....57

**Gambar 4. 26** jumlah konsentrasi alga kering.....57

**Gambar 4. 27** jumlah konsentrasi alga kering.....57

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan tugas akhir, dan manfaat tugas akhir.

### **1.1. Latar Belakang Masalah**

Indonesia merupakan negara dengan kekayaan alam yang sangat banyak, baik di darat maupun di laut. Kekayaan alam yang ada dapat dimanfaatkan sebagai sebuah sumber energi untuk mengatasi permasalahan yang terjadi. Pada saat ini energi benar-benar dibutuhkan dan harus dipenuhi. Energi yang dipakai pada saat ini kebanyakan menggunakan *fossil fuel* (energi fosil) dimana energi fosil ini merupakan energi yang terbatas dan tidak ramah lingkungan [1]. Oleh karena itu pada saat ini dibutuhkan energi yang ramah lingkungan dan bersifat terbarukan. Salah satu sumber energi yang cukup potensial adalah mikroalga. Mikroalga yang menghasilkan minyak nabati dapat menjadi biodiesel yang ramah lingkungan dan terbarukan. Sehingga dapat memberikan peluang yang besar untuk dapat mengganti kebutuhan bahan bakar yang berasal dari minyak bumi suatu negara.

Selama ini mikroalga hanya dijadikan sebagai sumber makanan untuk larva ikan pada kegiatan budidaya. Dari semua penelitian yang telah dilakukan, mikroalga merupakan salah satu penghasil biofuel yang sangat potensial untuk dapat dikembangkan. Mikroalga menjadi salah satu pilihan karena memiliki kemampuan berkembang biak dengan cepat dan tidak membutuhkan tempat yang luas untuk dikembangkan dan diproduksi. Dan yang paling penting adalah memiliki kandungan minyak yang banyak untuk biofuel. Untuk menghasilkan minyak mikroalga sebesar 16.103.453 kl/tahun hanya dibutuhkan lahan

seluas 274 ha, jika estimasi produksi minyak dari mikroalga adalah sebesar 587.000 liter (asumsi 30% minyak di dalam biomassa berat kering). Oleh karena itu, pengembangan mikroalga sebagai sumber bahan baku minyak pengganti minyak bumi mempunyai prospek yang dapat diandalkan [2]. Dalam penelitian yang sudah dilakukan, pertumbuhan mikroalga cenderung mengikuti pertumbuhan eksponensial dan umumnya dalam waktu yang relatif singkat, yakni selama 3,5 jam telah meningkat 2 kali dari jumlah biomassa awal. Kelebihan lain dari mikroalga adalah dapat dipanen setiap hari. Kandungan dari mikroalga dapat digunakan sebagai bahan makanan yang menyehatkan karena memiliki kandungan nutrisi yang menyehatkan. Mikroalga juga dapat dijadikan sebagai bahan kosmetik dan bahan baku industri farmasi. Secara ekonomi juga mikroalga dipilih karena ketersediaan dan biaya produksi yang cukup rendah [3].

Di Indonesia terdapat enam pabrik pupuk urea dengan karakteristik limbah cair yang mengandung urea dan Amonia-Nitrogen tidak termasuk senyawa B3, akan tetapi limbah cair pabrik pupuk urea dapat merusak ekosistem air. Sudah ada penanganan yang dilakukan untuk menangani pencemaran dari urea yaitu dengan cara nitrifikasi dan denitrifikasi heterotrik kolam terbuka atau ditampung di sebuah kolam besar sehingga terjadi pelepasan amonia ke udara. Cara ini membutuhkan biaya yang besar. Karena dirasa cara ini tidak begitu efektif ada cara lain yang lebih menguntungkan yaitu dengan cara membudidaya tumbuhan jenis *chlorophyta*. Alga tersebut merupakan mikroba autotrof yang mampu memanfaatkan urea dan Amonia-Nitrogen sebagai sumber karbon. Berdasarkan proses fotosintesis, mikroalga dapat digunakan untuk mengurangi  $CO_2$  dan nitrogen oksida yang dilepaskan ke atmosfer.  $CO_2$  digunakan untuk

menciptakan lipid dalam alga yang selanjutnya dapat digunakan untuk proses produksi energi pada *power plant* ataupun bahan bakar transportasi. Mikroalga memerlukan sejumlah kecil nutrient untuk tumbuh dibandingkan tanaman yang lain karena struktur sel mikroalga yang sederhana. Akan tetapi, mikroalga harus diberikan berbagai macam nutrient karena mikroalga tanaman tidak dapat berfungsi untuk membentuk campuran organik dengan sendirinya. Kebutuhan nutrient untuk mikroalga adalah nitrogen dan fosfor[4]. Pada saat ini telah banyak penelitian yang telah dilakukan mengenai pemanfaatan mikroalga sebagai bahan baku untuk *biofuel*. Kebanyakan penelitian yang sudah dilakukan cenderung memanfaatkan mikroalga sebagai bahan baku *biofuel* [5]. Hal ini dilakukan mengingat kandungan lipid yang ada pada mikroalga cukup tinggi. Salah satu penelitian yang sudah dilakukan tentang Mikroalga adalah pembentukan Pemodelan Perpindahan Massa Ekstraksi Lipid Kontinu Mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan Pelarut CXM pada tahun 2016 yang dilakukan oleh Sriati Monalisa Siahaan[11]. Kemudian pada tahun 2017 dilakukan kontrol optimal dengan mengatur volume pelarut sehingga menghasilkan ekstraksi lipid yang maksimal yang dilakukan oleh Fatkhunur Fariza R, menggunakan metode LQR[10]. Juga dilakukan penelitian pada tahun 2015 oleh Mardlijah dan Nailul Izzati “Optimal Feeding Strategy on Microalgae Growth in Fed-Batch Bioreactor Model”, di penelitian ini membahas model matematis pertumbuhan mikroalga pada bioreactor fed-batch dan strategi pemberian makan yang optimal menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin[12]. Kemudian juga pada tahun 2015 melakukan Kendali Optimal dimana karbon dioksida sebagai variable kontrol untuk menghasilkan pertumbuhan alga yang maksimal dengan menggunakan Model Thornton sebagai

referensi[2].

Sudah banyak penelitian tentang kontrol optimal dalam bidang-bidang biologi atau kimia. Beberapa penelitian kontrol optimal dalam bidang biologi adalah kontrol optimal pada model pertumbuhan alga yang dilakukan oleh Mardlijah, Ahmad Jamil, Lukman Hanafi, dan Suharmadi Sanjaya pada tahun 2017 [14]. Selain penggunaan kontrol optimal pada bidang kimia dan biologi, penelitian kontrol optimal juga dilakukan pada bidang pesawat tempur yang dilakukan oleh Heri Purnawan pada tahun 2015 dengan menggunakan metode LQR [15]. Pada penelitian ini penulis akan melakukan pengoptimalan pertumbuhan alga dengan menggunakan metode LQR berdasarkan parameter yang ada pada model matematika Thornton, sehingga dapat menghasilkan bahan bakar biodiesel yang banyak untuk mengatasi permasalahan energi. Metode LQR digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada Tugas Akhir ini karena metode LQR dapat mengatasi gangguan-gangguan besar yang terjadi pada kestabilan sistem tanpa mengurangi performa kerja[10]. Pada penelitian ini akan direpresentasikan berdasarkan hasil perhitungan dan akan dilakukan simulasi menggunakan software MATLAB.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang diatas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

- a. Analisa kestabilan dan keterkontrolan sistem dari model matematika pertumbuhan alga
- b. Bagaimana performansi aliran nutrisi dan karbondioksida yang optimal sehingga dapat memaksimalkan produksi alga?

- c. Bagaimana pengaruh aliran nutrisi dan aliran karbon dioksida berperan dalam pertumbuhan alga?

### **1.3. Batasan Masalah**

Berdasarkan permasalahan diatas, adapun batasan masalah dari pengerjaan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Model matematika pertumbuhan alga dan nilai parameter diperoleh dari referensi (Thornton dkk,2010).
2. Perhitungan biaya untuk proses produksi Mikroalga diabaikan

### **1.4. Tujuan**

Tujuan dalam penulisan Tugas Akhir ini adalah:

- a. Untuk mengetahui sifat-sifat sistem dari model matematika pada pertumbuhan alga
- b. Untuk mengetahui performansi aliran karbon dioksida dan nutrisi yang optimal sehingga dapat memaksimalkan pertumbuhan alga.
- c. Untuk mengetahui pengaruh dari aliran nutrisi dan aliran karbondioksida dalam pertumbuhan alga.

### **1.5. Manfaat Penelitian**

Manfaat yang bisa diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Memberikan informasi mengenai aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi yang optimal sehingga diperoleh produksi alga yang maksimal dan dapat menghasilkan biodiesel yang melimpah.
2. Bagi akademisi, penelitian ini dapat digunakan sebagai pembelajaran mengenai penerapan kendali optimal pada masalah kimia dan biologi.

### **1.6. Sistematika Penulisan**

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab. yaitu :

#### **1. BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

#### **2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

BAB II berisi tentang definisi, teori-teori, penelitian sebelumnya yang terkait permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Teori-teori yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain mengenai kestabilan dan keterkontrolan sistem dinamik dan juga penyelesaian masalah kontrol optimal.

#### **3. BAB III METODE PENELITIAN**

Pada BAB III dijelaskan langkah-langkah yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir.

#### **4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Dalam BAB IV ini menjelaskan tentang kestabilan dan keterkontrolan sistem dinamik model pertumbuhan alga, kemudian melakukan simulasi kontrol optimal dengan menggunakan software *Matlab*.

#### **5. BAB V PENUTUP**

Bab V berisi kesimpulan dari hasil pembahasan pada BAB IV dan saran untuk pengembangan penelitian berikut.



## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **2.1. Definisi Alga dan Jenisnya**

Alga merupakan organisme yang dianggap sebagai nenek moyang tumbuhan saat ini. Alga memiliki beberapa karakteristik yang juga dimiliki oleh tumbuhan saat ini seperti pigmen klorofil. Alga merupakan kelompok tumbuhan yang berklorofil yang terdiri dari satu atau banyak sel dan berbentuk koloni. Secara spesifik bentuk tubuh beserta ukurannya tidak akan sama persis dengan tumbuhan dan ukuran tubuhnya sekalipun dalam bentuk makro tidak mudah dilihat dengan mata telanjang. Ciri-ciri lain dari alga adalah tidak memiliki akar, batang, dan daun sejati. Tubuh seperti ini dinamakan talus. Itulah sebabnya alga tidak dapat digolongkan sebagai tumbuhan (plantae). Mikroalga merupakan tumbuhan yang halus yang berklorofil dan mempunyai pigmen tumbuhan yang dapat menyerap cahaya matahari melalui proses fotosintesis.

Pada saat ini, diperkirakan ada sekitar 200.000-800.000 spesies mikroalga yang ada di bumi, dimana baru ada sekitar 35.000 spesies saja yang telah diidentifikasi. Beberapa contoh mikroalga yang sudah teridentifikasi adalah *Spirulina*, *Nannochloropsis sp.*, *Botryococcus braunii*, *Chlorella sp.*, *Dunaliella primolecta*, *Nitzschia sp.*, *Tetraselmis suecia* dan lain-lain[6]. Mikroalga tumbuh dan berkembang pada media air, sehingga mempunyai tingkat efisiensi yang lebih tinggi dalam hal penggunaan air, karbondioksida, dan nutrisi lainnya bila dibandingkan dengan tanaman tingkat tinggi.

Pertumbuhan mikroalga sendiri terdiri dari tiga fase utama, yaitu fase lag, eksponensial, dan stasioner. Kebanyakan spesies mikroalga menghasilkan produk yang khas seperti karotenoid, antioksidan, asam lemak, enzim, polimer, peptide, toksin, dan

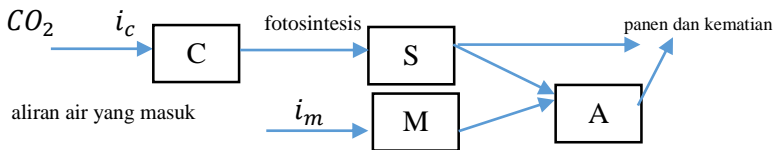
sterol.

Mikroalga merupakan mikroorganisme yang dapat digunakan sebagai bahan baku *biofuel*. Terdapat beberapa *biofuel* yang dihasilkan mikroalga yaitu: hidrogen, biodiesel, bioethanol, dan biogas.

Mikroalga memiliki kelebihan lain dibanding tanaman pangan lainnya untuk dimanfaatkan sebagai bahan baku *biofuel*, yaitu pertumbuhan yang cepat, menggunakan air laut dan air tawar, konsumsi air dalam jumlah sedikit, tidak berkompetensi dengan bahan pangan, biaya produksi yang rendah serta produktivitas tinggi.

## 2.2. Model Matematika Pertumbuhan Alga

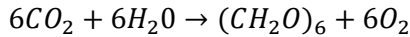
Secara sederhana, pertumbuhan alga menurut model Thornton dapat diilustrasikan pada Gambar 2.1. Karbon dioksida dipompa ke dalam air dan berubah menjadi glukosa melalui fotosintesis. Kemudian nutrisi yang terdapat di dalam air pembuangan rumah kaca dan glukosa membentuk alga. Selanjutnya alga dan glukosa yang tersimpan diasumsikan berkurang dengan adanya kematian dari hasil panen. Energi tidak hanya disimpan dalam glukosa, tetapi juga sebagai glukosa yang lebih kompleks dan minyak.



Gambar 2. 1 produksi alga dari nutrisi dan karbondioksida

Produksi alga dimodelkan dengan konsentrasi alga kering ( $A$ ), nutrisi ( $M$ ), glukosa ( $S$ ), dan karbon dioksida ( $C$ ) di kolam. Dengan asumsi bahwa kolam teraduk dengan baik dan pertumbuhan alga sangat lambat, konsentrasi-konsentrasi di atas

bersifat independen dari semua variable spasial dan hanya bergantung pada waktu  $t$ . Masuknya nutrisi dan karbon dioksida ke dalam dilambangkan oleh  $I_m$  dan  $I_c$ . Alga ini sedang kelaparan pada ‘tingkat kematian’ ( $D_r$ ) dan dipanen ( $H_r$ ), yang keduanya mengurangi jumlah alga dan glukosa yang tersimpan di dalam alga. Selanjutnya glukosa yang di produksi ( $\alpha_s C$ ) dari karbon dioksida, dimana ( $\alpha_s$ ) adalah konstan. Hal ini mengurangi jumlah karbon dioksida ( $-k_1 \alpha_s C$ ). Dari proses fotosintesis oksigen



Alga baru diproduksi didalam alga yang ada ( $\alpha_a f_m(M)$ ) dari nutrisi dan glukosa, dimana  $\alpha_A$  adalah konstanta dan  $f_m(M)$  menunjukkan konsentrasi nutrisi dalam sel. Hal tersebut menghabiskan nutrisi dan glukosa dengan ( $-k_2 \alpha_A f_m(M)$ ) dan ( $-k_3 \alpha_A f_m(M)$ ). Menggabungkan pengaruh pertumbuhan alga, fotosintesis masuknya karbon dioksida ,mineral, kematian dan panen alga. Diperoleh sistem berikut[5];

$$\dot{A} = \alpha_a f_m(M)S - (D_r + h_r)A \quad (2.1)$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A f_m(M)S + i_m \quad (2.2)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A f_m(M)S - (D_r + h_r)S \quad (2.3)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + i_c \quad (2.4)$$

Keterangan:

- $A$  : Konsentrasi mikroalga kering
- $M$  : Konsentrasi nutrisi
- $S$  : Konsentrasi glukosa
- $C$  : Konsentrasi karbondioksida
- $f_m(M)$  : Konsentrasi nutrisi dalam sel mikroalga
- $I_c(t)$  : aliran masuk karbondioksida
- $I_m(t)$  : aliran masuk nutrisi
- $D_r$  : Tingkat kematian mikroalga

- $h_r$  : Tingkat panen mikroalga  
 $\alpha_A$  : konstanta pertumbuhan biomassa  
 $\alpha_s$  : Konstanta fotosintesis  
 $k_1$  : tingkat perubahan  $CO_2$  menjadi  $(CH_2O)_6$   
 $k_2$  : Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga kering  
 $k_3$  : Tingkat perubahan  $(CH_2O)_6$  menjadi mikroalga kering

Diasumsikan konsentrasi nutrisi dalam sel jenuh  $p_{max} = 0.4 \text{ g}[M]m^{-3}$  dan setengah jenuh didapat ketika konsentrasi nutrisi diluar  $M_{turn} = 4 \text{ g}[M]m^{-3}$ .

$$f_m(M) = p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}}$$

Sehingga persamaan (2.1)-(2.4) dapat ditulis menjadi :

$$\dot{A} = \alpha_a(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)A \quad (2.5)$$

$$\dot{M} = -k_2\alpha_A f_m(M)S + i_m \quad (2.6)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3\alpha_A(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)S \quad (2.7)$$

$$\dot{C} = -k_1\alpha_s C + i_c \quad (2.8)$$

Kondisi awal dan parameter yang digunakan berasal dari penelitian Thornton dkk [5] yang diperoleh sebagai berikut:

1. Kondisi awal ( $A^0, M^0, S^0, C^0$ ) adalah (3, 0.4, 10, 5), ((3, 0.6, 15, 7.5), dan (3, 0.2, 5, 2.5)
2. Nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini yang berdasarkan pada penelitian thornton yang disajikan pada tabel dibawah:

Parameter		Nilai
$\alpha_A$	Konstanta pertumbuhan biomassa	10.2
$p_{max}$	Konsentrasi nutrisi dalam sel jenuh	0.4
$D_r$	Tingkat kematian mikroalga	0.46
$h_r$	Tingkat panen mikroalga	2
$M_{Turn}$	Konsentrasi nutrisi setengah jenuh diperoleh ketika nutrisi diluar	4
$I_m$	Aliran masuk nutrisi	4.2
$\alpha_s$	Konstanta fotosintesis	67.6
$k_1$	tingkat perubahan $CO_2$ menjadi $(CH_2O)_6$	0.4
$k_2$	Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga kering	0.05
$k_3$	Tingkat perubahan $(CH_2O)_6$ menjadi mikroalga kering	0.05
$I_c$	aliran masuk karbondioksida	4

Tabel 2. 1 Nilai Parameter

### 2.3. Titik Keseimbangan

#### Definisi 2.1 [8]

Titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  yang memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$  disebut suatu titik setimbang jika  $f(\bar{x}) = 0$

### 2.4. Analisa Kestabilan

Pada penelitian kali ini akan dibahas tentang analisa kestabilan pada sistem model pertumbuhan alga. Karena pada penelitian sistem yang digunakan berbentuk nonlinier, sehingga untuk menganalisis kestabilan adalah dengan menganalisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbang dari sistem dengan menggunakan Deret Taylor untuk mencari suatu hampiran solusi disekitar titik setimbang. Deret Taylor untuk sistem  $f$  disekitar titik setimbang  $(\bar{x})$  adalah

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{f'(\bar{x})}{1!}(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad (2.10)$$

Dimana turunan  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dots$ , dihitung pada  $x = \bar{x}$ . Dengan mengabaikan suku-suku berorde tinggi, selanjutnya persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}(x - \bar{x}) \quad (2.11)$$

Dari persamaan (2.11) akan terbentuk suatu model matematika yang linier dari sistem nonlinier dari pendekatan deret Taylor. Selanjutnya, dilihat dari sistem  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  disekitar titik setimbang  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  dan kondisi setimbangnya adalah ketika  $f(\bar{x}) = 0$ . Maka persamaan (2.11) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ f_2(x) &= \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ &\vdots \\ f_n(x) &= \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned}$$

Dengan mengabaikan suku non-liniernya didapat:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \\ &\quad \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\
&\vdots \\
f_n(x) &= \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Kemudian dengan mendefinisikan

$$x_1 - \bar{x}_1 = y_1$$

$$x_2 - \bar{x}_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$x_n - \bar{x}_n = y_n$$

Didapat deivatifnya adalah

$$\dot{y}_1 = f_1(x), \dot{y}_2 = f_2(x), \dots, \dot{y}_n = f_n(x)$$

Sehingga  $\dot{y} = f(x)$  dan diperoleh

$$\dot{y}_1 = f_1(x) = \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} y_n$$

$$\dot{y}_2 = f_2(x) = \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} y_n$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_n = f_n(x) = \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} y_n$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Atau ditulis menjadi

$$\dot{y} = J(f(\bar{x}))y$$

Dengan  $J(f(\bar{x}))$  merupakan matriks Jacobian dari fungsi  $f$  dititik kesetimbangan  $\bar{x}$ .

**Definisi 2.2 [13]**

Diberikan fungsi  $\mathbf{f} = f_1, f_2, \dots, f_n$  dengan  $f_i \in C^1(E)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  dan  $E$  himpunan terbuka. Matriks

$$J(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dinamakan matriks Jacobian dari  $f$  dari  $\bar{x}$ .

Matriks jacobian  $J(f(\bar{x}))$  dapat digunakan untuk mengidentifikasi kestabilan sistem nonlinier disekitar titik ekuilibrium  $\bar{x}$  asalkan titik kesetimbangan tersebut hiperbolik.

**Definisi 2.3 [13]**

Titik kesetimbangan  $\bar{x}$  dikatakan hiperbolik jika semua nilai eigen matriks Jacobian  $J(f(\bar{x}))$  mempunyai bagian real tak nol.



Berikut definisi mengenai sifat kestabilan suatu sistem nonlinier yang ditinjau dari nilai eigen matriks Jacobian.

**Definsi 2.4 [13]**

*Suatu titik kesetimbangan  $\bar{x}$  pada sistem persamaan differensial  $\dot{x} = f(x)$  dikatakan*

- i. *Stabil jika semua nilai eigen matriks Jacobian  $J(f(\bar{x}))$  mempunyai bagian real negatif,*
- ii. *Tidak stabil, jika semua nilai eigen matriks Jacobian  $J(f(\bar{x}))$  mempunyai bagian real positif,*
- iii. *Pelana(saddle), jika titik ekuilibrium hiperbolik dan terdapat nilai eigen matriks jacobian  $J(f(\bar{x}))$  mempunyai bagian real positif dan negatif.*

## 2.5. Keterkontrolan Sistem

Perilaku sistem sistem yang selanjutnya yang dianalisis adalah mengenai keterkontrolan sistem. Keterkontrolan sistem bermanfaat dalam menstabilkan sistem. Jika sistem tidak terkontrol solusi dari suatu permasalahan kontrol optimal tidak akan diperoleh.

**Teorema 2.1 [8]**

*Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah:*

*matriks  $M_c = (B|AB|A^2B|A^{n-1}B)$  mempunyai rank yang sama dengan  $n$*

## 2.6. Linier Quadratic Regulator

Metode LQR merupakan teknik kendali modern yang diimplementasikan dalam bentuk ruang dan waktu (*state space*) yang digunakan untuk mendesain dinamik optimal regulator. Berdasarkan sistem persamaan berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Dengan keterangan sebagai berikut:

$A_{n \times n}$	= matriks ruang keadaan
$B_{n \times m}$	= matriks masukkan kendali
$C_{r \times n}$	= matriks keteramatan
$x(t)$	= Vektor ruang keadaan
$y(t)$	= Output proses
$u(t)$	= Input proses

dimana A,B,dan C adalaah matriks bersifat invariant waktu.

Metode LQR berfungsi untuk untuk mencari gain regulator sesuai dengan persamanaan model *state space* seperti persamaan diatas. Dengan meminimumkan nilai dari *cost function* sebagai berikut [9]

$$J = \frac{1}{2} x^T P_c x + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt \quad (2.13)$$

## 2.7. Hubungan Aljabar Ricatti Dengan Gain Regulator

Pada sistem liner, *state* sistem dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax + Bu_c \quad (2.14)$$

Dapat diperoleh aljabar Ricatti dari persamaan Hamiltonian berikut:

$$H = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u_c^T R u_c + \lambda^T (Ax + Bu_c) \quad (2.15)$$

dari persamaan (2.14) didapat nilai *state* & *co-state* adalah:

$$\dot{\lambda} = \frac{-\partial H}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T \lambda \quad (2.17)$$

Kemudian untuk mendapatkan kondisi optimal, maka:

$$\frac{\partial H}{\partial u_c} = 0 = Ru_c + B^T \lambda \quad (2.18)$$

Sehingga :

$$u_c = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (2.19)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.19) kedalam persamaan (2.14), sehingga didapat:

$$\dot{x} = Ax + B(-R^{-1} B^T \lambda) = Ax - BR^{-1} B^T \lambda \quad (2.20)$$

Sehingga persamaan (2.17) dan (2.20) dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Dengan pemisalan  $\lambda = P_c x$ , didapat  $\dot{\lambda} = \dot{P}_c x + P_c \dot{x}$ , dan dengan memasukan nilai  $\dot{x}$  dari persamaan (2.20) didapat:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T Px) \quad (2.22)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (2.17) dan (2.22),sehingga menjadi:

$$-Qx - A^T Px = \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T Px)$$

$$-\dot{P}x = PAx + A^T Px - PBR^{-1}B^T Px + Qx$$

Karena nilai P konstan, maka  $\dot{P} = 0$ ,sehingga:

$$0 = PAx + A^T Px - PBR^{-1}B^T Px + Qx \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) merupakan persamaan Aljabar Riccati untuk penyelesaian nilai  $P_c$ [9].

## 2.8. Penelitian Terdahulu

Pada tahun 2010, Thornton dkk telah melakukan penelitian dengan membentuk sebuah model pertumbuhan alga dengan menggunakan alga kering. Tetapi pada penelitian yang dilakukan Thornton dkk, sistem dinamik pada model belum dilakukan penelitian tentang sifat dari sistem tersebut.

Pada tahun 2015, Hajar melakukan penelitian tentang analisis model pada pertumbuhan alga untuk memaksimalkan pertumbuhan alga dengan aliran karbon dioksida sebagai variable kendali. Dengan menerapkan teori kendali optimal Pontryagin diperoleh pengendali optimal berupa aliran karbon dioksida.

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***

### **BAB III**

#### **METODOLOGI PENELITIAN**

Bagian ini menjelaskan metode pengerjaan yang digunakan dalam penelitian ini sekaligus sebagai panduan dalam pengerjaan tugas akhir. Langkah-langkah yang diambil dalam penulisan penelitian ini adalah:

#### **3.1. Metode penelitian**

##### **1. Studi Literature**

Pada tahap ini meliputi identifikasi permasalahan dan mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi yang dipakai adalah buku-buku literature, jurnal ilmiah, tugas akhir atau thesis yang berkaitan dengan permasalahan, maupun artikel dari internet. Mempelajari lebih dalam mengenai model pertumbuhan alga.

##### **2. Analisis Kestabilan dan Keterkontrolan Sistem**

Menganalisis kestabilan yaitu dengan menentukan titik setimbang pada model matematika pertumbuhan alga. Kemudian melakukan pelinearan dengan membentuk matriks Jacobian. Sehingga kestabilan sistem dapat ditinjau melalui akar-akar karakteristik dari matriks jacobian dan kriteria Routh-Hurwitz. Sedangkan sifat keterkontrolan model matematika pertumbuhan alga dapat dianalisis dengan cara membentuk matriks keterkontrolan( $Ktr$ ) dan menentukan rank dari matriks ( $Ktr$ ).

##### **3. Menentukan Formulasi Masalah Kendali Optimal**

Menentukan masalah kendali optimal dari model pertumbuhan alga yang meliputi sistem dinamik dan

fungsi objektif serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

4. Menentukan Penyelesaian Kendali Optimal

Setelah diformulasikan masalah kendali optimal, maka langkah selanjutnya yaitu penyelesaian kendali optimal dari model matematika pertumbuhan alga menggunakan Linear Quadratic Regulator. Langkah-langkah yang dilakukan adalah:

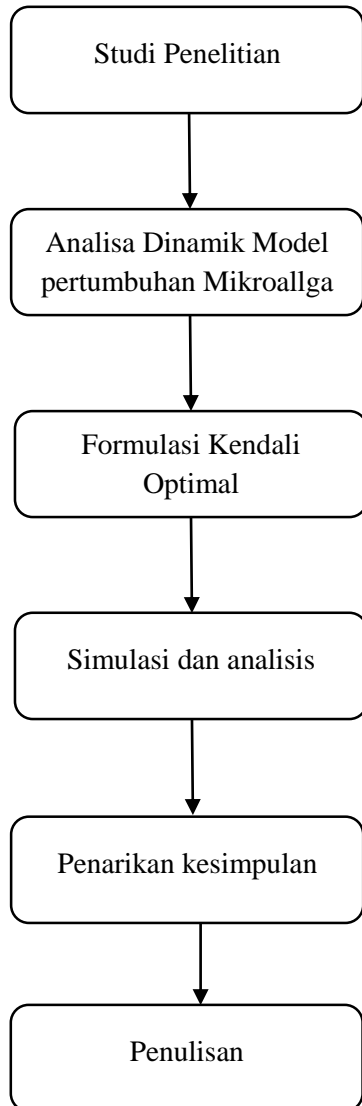
- Menentukan matriks  $Q$  dan  $R$
- Mendapatkan matriks  $P$
- Mendapatkan *gain feedback*

5. Simulasi

Pada tahap ini peneliti melakukan simulasi menggunakan software Matlab untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan dari model pertumbuhan alga.

6. Menarik kesimpulan dari hasil penelitian

Model dan simulasi yang sudah diteliti akan dibuat dalam beberapa kesimpulan.



Gambar 3.1. Diagram Alur Pengerjaan

***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***



## BAB IV

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditentukan kendali optimal dari model pertumbuhan alga yang digunakan, yaitu model pertumbuhan alga oleh Thornton dkk. Sebelum menentukan kendali optimal, akan dibahas juga analisa dinamik dari sistem persamaan pada model pertumbuhan alga tersebut. Analisis dinamik meliputi analisa kestabilan dan keterkontrolan. Juga akan dibahas mengenai titik kesetimbangan dan penyelesaian kendali optimal dari sistem menggunakan *Linear Quadratic Regulator*, kemudian disimulasikan dengan Software Matlab.

#### 4.1 Model Pertumbuhan Alga

$$\dot{A} = \alpha_a(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)A \quad (4.1)$$

$$\dot{M} = -k_2\alpha_A(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S + i_m(t) \quad (4.2)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3\alpha_A(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)S \quad (4.3)$$

$$\dot{C} = -k_1\alpha_s C + i_c(t) \quad (4.4)$$

#### 4.2 Titik Setimbang

Titik setimbang diperoleh ketika menyama dengankan nol state-state yang ada, yaitu  $\dot{A} = 0, \dot{M} = 0, \dot{S} = 0, \dot{C} = 0$ . Sehingga persamaan (4.1)-(4.4) menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= 0 \\ \alpha_a(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)A &= 0 \\ \dot{M} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$-k_2(p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})\alpha_A S + i_m \quad (4.6)$$

$$\dot{S} = 0$$

$$\alpha_s C - k_3 \alpha_A (p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S - (D_r + h_r)S = 0 \quad (4.7)$$

$$\dot{C} = 0$$

$$-k_1 \alpha_s C + i_c = 0 \quad (4.8)$$

Dari persamaan (4.8) didapat:

$$C = \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} \quad (4.9)$$

Kemudian mencari nilai  $M$  akan didapat

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A (p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S + i_m(t) = 0$$

$$-k_2 \alpha_A (p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}})S = -i_m(t)$$

$$S = \frac{-I_m(t)(M+M_{turn})}{-k_2 \alpha_A p_{max} M}$$

$$S = \frac{I_m(t)(M+M_{turn})}{k_2 \alpha_A p_{max} M} \quad (4.10)$$

Setelah mendapatkan persamaan (4.9) dan (4.10) substitusi persamaan tersebut kedalam persamaan (4.7), sehingga diperoleh :

$$\alpha_s \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 \alpha_A (p_{max} \frac{M}{M+M_{turn}}) \frac{I_m(t)(M+M_{turn})}{k_2 \alpha_A p_{max} M} - (D_r + h_r) \frac{I_m(t)(M+M_{turn})}{k_2 \alpha_A p_{max} M} = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha_s \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 \alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M + M_{\text{turn}}} \right) \frac{I_m(t)(M + M_{\text{turn}})}{k_2 \alpha_A p_{\max} M} \\ = (D_r + h_r) \frac{I_m(t)(M + M_{\text{turn}})}{k_2 \alpha_A p_{\max} M}\end{aligned}$$

$$\alpha_s \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} - \frac{k_3 I_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r) \frac{I_m(t)(M + M_{\text{turn}})}{k_2 \alpha_A p_{\max} M}$$

$$\frac{I_c(t)}{k_1} - \frac{k_3 I_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r) \frac{I_m(t)(M + M_{\text{turn}})}{k_2 \alpha_A p_{\max} M}$$

$$\frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2} \frac{1}{I_m(t)(D_r + h_r)} = \frac{M + M_{\text{turn}}}{k_2 \alpha_A p_{\max} M}$$

$$\frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 I_m(t)(D_r + h_r)} = \frac{M + M_{\text{turn}}}{k_2 \alpha_A p_{\max} M}$$

$$\frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 I_m(t)(D_r + h_r)} (k_2 \alpha_A p_{\max}) = 1 + \frac{M_{\text{turn}}}{M}$$

$$\frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 I_m(t)(D_r + h_r)} (k_2 \alpha_A p_{\max}) - 1 = \frac{M_{\text{turn}}}{M}$$

$$\frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} (\alpha_A p_{\max}) - 1 = \frac{M_{\text{turn}}}{M}$$

$$\frac{(\alpha_A p_{\max})(k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t))}{k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} - \frac{k_1 I_m(t)(D_r + h_r)}{k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} = \frac{M_{\text{turn}}}{M}$$

$$M = \frac{M_{\text{turn}} k_1 I_m(t)(D_r + h_r)}{(\alpha_A p_{\max})(k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)) - k_1 I_m(t)(D_r + h_r)}$$

kemudian dari Persamaan A didapat (4.11)

$$\alpha_a(p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}})S - (D_r + h_r)A = 0$$

$$\alpha_a(p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}})S = (D_r + h_r)A \quad (4.12)$$

Dari Persamaan (4.6) didapat

$$\alpha_a(p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}})S = \frac{I_m(t)}{k_2} \quad (4.13)$$

Kemudian mensubstitusi Persamaan (4.13) ke Persamaan (4.12) didapat:

$$(D_r + h_r)A = \frac{I_m(t)}{k_2}$$

$$A = \frac{I_m(t)}{k_2(D_r + h_r)} \quad (4.14)$$

Untuk mendapat nilai S, terlebih dahulu mensubstitusikan persamaan (4.13) dan (4.9) ke dalam persamaan (4.7), sehingga didapat :

$$\alpha_s \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 \frac{I_m(t)}{k_2} - (D_r + h_r)S = 0$$

$$\alpha_s \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} - k_3 \frac{I_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r)S$$

$$\frac{I_c(t)}{k_1} - k_3 \frac{I_m(t)}{k_2} = (D_r + h_r)S$$

$$\frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)} = S$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$S = \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)} \quad (4.15)$$

Dari persamaan (4.9), (4.11), (4.14), (4.15) dapat diperoleh titik setimbang  $\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$  dari sistem dinamik model pertumbuhan alga adalah

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left( \frac{I_m(t)}{k_2 (D_r + h_r)}, \frac{M_{turn}(k_1 I_m(t))(D_r + h_r)}{\alpha_{Apmax}(k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)) - k_1 I_m(t)(D_r + h_r)} \right. \\ &\quad \left. , \frac{k_2 I_c(t) - k_1 k_3 I_m(t)}{k_1 k_2 (D_r + h_r)}, \frac{I_c(t)}{k_1 \alpha_s} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

atau

$$\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C}) = (1.6260; 1.7095; 3.9837; 0.1479)$$

### 4.3 Analisa Kestabilan

Setelah diperoleh titik setimbang dari sistem dinamik model pertumbuhan alga, tahap selanjutnya adalah menganalisis kestabilan sistem dinamik model pertumbuhan alga. Persamaan (4.1) – (4.4) merupakan persamaan tak linier, sehingga untuk melakukan analisis kestabilan adalah dengan cara menganalisis transformasi kestabilan lokal disekitar titik setimbang dari sistem.

Sesuai dengan landasan teori pada bab 2.4, untuk menganalisis kestabilan sistem pertumbuhan alga, dapat dilakukan dengan melakukan pendekatan terhadap Deret Taylor seperti pada Persamaan (2.12) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1(A, M, S, C) &= \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} (A - \bar{A}) + \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} (M - \bar{M}) + \\
 &\quad \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} (C - \bar{C}) \\
 f_2(A, M, S, C) &= \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} (A - \bar{A}) + \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} (M - \bar{M}) + \\
 &\quad \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} (C - \bar{C}) \\
 f_3(A, M, S, C) &= \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} (A - \bar{A}) + \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} (M - \bar{M}) + \\
 &\quad \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} (C - \bar{C}) \\
 f_4(A, M, S, C) &= \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} (A - \bar{A}) + \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} (M - \bar{M}) + \\
 &\quad \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} (S - \bar{S}) + \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} (C - \bar{C})
 \end{aligned}$$

Selanjutnya didefinisikan,

$$\begin{aligned}
 A - \bar{A} &= A_0 \\
 M - \bar{M} &= M_0 \\
 S - \bar{S} &= S_0 \\
 C - \bar{C} &= C_0
 \end{aligned}$$

Didapat derivatifnya yaitu

$\dot{A} = f_1(A, M, S, C)$ ,  $\dot{M} = f_2(A, M, S, C)$ ,  $\dot{S} = f_3(A, M, S, C)$ , dan  $\dot{C} = f_4(A, M, S, C)$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \dot{A} = f_1(A, M, S, C) &= \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} A_0 + \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} M_0 + \\
 &\quad \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} S_0 + \frac{\partial f_1(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} C_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M} &= f_2(A, M, S, C) = \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} A_0 + \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} M_0 + \\
&\quad \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} S_0 + \frac{\partial f_2(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} C_0 \\
\dot{S} &= f_3(A, M, S, C) = \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} A_0 + \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} M_0 + \\
&\quad \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} S_0 + \frac{\partial f_3(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} C_0 \\
\dot{C} &= f_4(A, M, S, C) = \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial A} A_0 + \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial M} M_0 + \\
&\quad \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial S} S_0 + \frac{\partial f_4(\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})}{\partial C} C_0
\end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial C} \\ \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial A} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial M} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ M_0 \\ S_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Dengan  $\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$  dan

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial A} &= \frac{\partial(\alpha_A(p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}})^{S-(D_r+h_r)A})}{\partial A} \\
&= -(D_r + h_r) \\
\text{b) } \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial M} &= \frac{\partial(\alpha_A(p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}})^{S-(D_r+h_r)A})}{\partial M} \\
&= \alpha_A p_{\max} \bar{S} \left( \frac{1}{\bar{M}+M_{\text{turn}}} - \frac{\bar{M}}{(\bar{M}+M_{\text{turn}})^2} \right) \\
\text{c) } \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial S} &= \frac{\partial(\alpha_A(p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}})^{S-(D_r+h_r)A})}{\partial S} \\
&= \frac{\alpha_A p_{\max} \bar{M}}{\bar{M}+M_{\text{turn}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial C} &= \frac{\partial(\alpha_A \left( p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} \right) S - (D_r + h_r) A)}{\partial S} \\
&= 0 \\
\text{e)} \quad \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial A} &= \frac{\partial(-k_2 \alpha_A p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} + I_m(t))}{\partial A} \\
&= 0 \\
\text{f)} \quad \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial M} &= \frac{\partial(-k_2 \alpha_A p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} + I_m(t))}{\partial M} \\
&= -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} \bar{S}}{M+M_{\text{turn}}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{\max} \bar{M} \bar{S}}{(M+M_{\text{turn}})^2} \\
\text{g)} \quad \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial S} &= \frac{\partial(-k_2 \alpha_A p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} + I_m(t))}{\partial S} \\
&= -\frac{k_2 \alpha_A p_{\max} \bar{M}}{M+M_{\text{turn}}} \\
\text{h)} \quad \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial C} &= \frac{\partial(-k_2 \alpha_A p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} + I_m(t))}{\partial C} \\
&= 0 \\
\text{i)} \quad \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial A} &= \frac{\partial \left[ \alpha_S C - \left( p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} \right) S - (D_r + h_r) S \right]}{\partial A} \\
&= 0 \\
\text{j)} \quad \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial M} &= \frac{\partial \left[ \alpha_S C - \left( p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} \right) S - (D_r + h_r) S \right]}{\partial M} \\
&= -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} \bar{S}}{M+M_{\text{turn}}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{\max} \bar{S}}{(M+M_{\text{turn}})^2} \\
\text{k)} \quad \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial S} &= \frac{\partial \left[ \alpha_S C - \left( p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} \right) S - (D_r + h_r) S \right]}{\partial S} \\
&= -\frac{k_3 \alpha_A p_{\max} \bar{M}}{M+M_{\text{turn}}} - (D_r + h_r) \\
\text{l)} \quad \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial C} &= \frac{\partial \left[ \alpha_S C - \left( p_{\max} \frac{M}{M+M_{\text{turn}}} \right) S - (D_r + h_r) S \right]}{\partial C} \\
&= \alpha_S \\
\text{m)} \quad \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial A} &= \frac{\partial(-k_1 \alpha_S C + I_c(t))}{\partial A} \\
&= 0 \\
\text{n)} \quad \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial M} &= \frac{\partial(-k_1 \alpha_S C + I_c(t))}{\partial M}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 0 \\
\text{o) } \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} &= \frac{\partial(-k_1\alpha_S C + I_c(t))}{\partial S} \\
&= 0 \\
\text{p) } \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} &= \frac{\partial(-k_1\alpha_S C + I_c(t))}{\partial S} \\
&= -k_1\alpha_S
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan nilai dari matriks, didapat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial A} &= z_1 = -(D_r + h_r) \\
\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial M} &= z_2 = \alpha_A p_{max} \bar{S} \left( \frac{1}{\bar{M} + M_{turn}} - \frac{\bar{M}}{(\bar{M} + M_{turn})^2} \right) \\
\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial S} &= z_3 = \frac{\alpha_A p_{max} \bar{M}}{\bar{M} + M_{turn}} \\
\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial C} &= 0 \\
\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial A} &= 0 \\
\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial M} &= z_4 = -\frac{k_2 \alpha_A p_{max} \bar{S}}{\bar{M} + M_{turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{max} \bar{M} \bar{S}}{(\bar{M} + M_{turn})^2} \\
\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial S} &= z_5 = -\frac{k_2 \alpha_A p_{max} \bar{M}}{\bar{M} + M_{turn}} \\
\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial C} &= 0 \\
\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial A} &= 0 \\
\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial M} &= z_6 = -\frac{k_3 \alpha_A p_{max} \bar{S}}{\bar{M} + M_{turn}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{max} \bar{S}}{(\bar{M} + M_{turn})^2} \\
\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial S} &= z_7 = -\frac{k_3 \alpha_A p_{max} \bar{M}}{\bar{M} + M_{turn}} - (D_r + h_r) \\
\frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial C} &= z_8 = \alpha_S \\
\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial A} &= 0 \\
\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial M} &= 0 \\
\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial S} &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial s} = z_9 = -k_1 \alpha_s$$

Kemudian substitusikan setiap nilai kedalam bentuk matriks, sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & z_4 & z_5 & 0 \\ 0 & z_6 & z_7 & z_8 \\ 0 & 0 & 0 & z_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ M_0 \\ S_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk Jacobian

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{M} \\ \dot{S} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = J(f(\bar{x})) \begin{pmatrix} A_0 \\ M_0 \\ S_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Berdasarkan Definisi 2.2 dapat dikatakan bahwa  $J(f(\bar{x}))$  merupakan matriks Jacobian  $f$  dari  $\bar{x}$ . Berdasarkan Definisi 2.3 matriks Jacobian dapat digunakan untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nolinier disekitar titik kesetimbangan  $\bar{x}$ . Kemudian dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian menggunakan

$$|J(f(\bar{x})) - \lambda I| = 0$$

Sehingga,

$$\begin{vmatrix} Z_1 - \lambda & Z_2 & Z_3 & 0 \\ 0 & Z_4 - \lambda & Z_5 & 0 \\ 0 & Z_6 & Z_7 - \lambda & Z_8 \\ 0 & 0 & 0 & Z_9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(z_1 - \lambda) \left( \begin{vmatrix} z_4 - \lambda & z_5 & 0 \\ z_6 & z_7 - \lambda & z_8 \\ 0 & 0 & z_9 - \lambda \end{vmatrix} \right) = 0$$

$$(z_1 - \lambda)(z_9 - \lambda) \begin{vmatrix} z_4 - \lambda & z_5 \\ z_6 & z_7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(z_1 - \lambda(z_9 - \lambda))[(z_4 - \lambda)(z_7 - \lambda) - (z_6)(z_5)] = 0$$

$$(z_1 - \lambda(z_9 - \lambda))[\lambda^2 - (z_4 + z_7)\lambda + (z_4)(z_7) - (z_6)(z_5)] = 0$$

Dengan mencari akar-akar persamaan kuadrat untuk mendapat  $\lambda_{3,4}$

$$\lambda_{3,4} = \frac{z_4 + z_7 \pm \sqrt{((z_4) + (z_7))^2 - 4\{(z_4)(z_7) - (z_6)(z_5)\}}}{2}$$

Dengan memasukan nilai parameter, didapat :

$$\lambda_3 = \frac{-2,6208 + \sqrt{(-2.6208)^2 - 4(0.2453)}}{2} = -0.0972$$

$$\lambda_4 = \frac{-2,6208 - \sqrt{(-2.6208)^2 - 4(0.2453)}}{2} = -2.523595$$

Sehingga didapat seluruh nilai  $\lambda$  sebagai berikut:

$$\lambda_1 = z_1 = -(D_r + h_r) = -2.46$$

$$\lambda_2 = z_9 = -k_1 \alpha_s = -27.04$$

$$\lambda_3 = -0.0972$$

$$\lambda_4 = -2.523595$$

Karena nilai parameter bernilai positif, maka dapat diketahui bahwa hasil  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  bernilai negative. Jadi sesuai dengan Definisi 2.4 bahwa titik setimbang  $\bar{x} = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C})$  bersifat stabil. Setelah menganalisis kestabilan sistem dan didapati bahwa sistem stabil, pada sub bab selanjutnya akan dilakukan analisa keterkontrolan pada sistem dinamik model pertumbuhan alga.

#### 4.4 Analisa keterkontrolan

Untuk dapat menganalisis keterkontrolan dibutuhkan adanya sistem dinamik yang telah dilinierkan. Setelah dilakukan

pelinieran pada bahasan sebelumnya diperoleh matriks Jacobian dengan memisalkan  $\bar{A}$ , diperoleh

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \\ 0 & Z_4 & Z_5 & 0 \\ 0 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ 0 & 0 & 0 & Z_9 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Dan matriks  $\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial I_c(t)} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial I_c(t)} \\ \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial f_3(\bar{x})}{\partial I_c(t)} \\ \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial f_4(\bar{x})}{\partial I_c(t)} \end{bmatrix}$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\alpha_a(p_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S-(D_r+h_r)A)}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial(\alpha_a(p_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S-(D_r+h_r)A)}{\partial I_c(t)} \\ \frac{\partial(-k_2\alpha_A(p_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S+i_m(t))}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial(-k_2\alpha_A(p_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S+i_m(t))}{\partial I_c(t)} \\ \frac{\partial(\alpha_s C - k_3\alpha_A(p_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S-(D_r+h_r)S)}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial(\alpha_s C - k_3\alpha_A(p_{max}\frac{M}{M+M_{turn}})S-(D_r+h_r)S)}{\partial I_c(t)} \\ \frac{\partial(-k_1\alpha_s C + i_c(t))}{\partial I_m(t)} & \frac{\partial(-k_1\alpha_s C + i_c(t))}{\partial I_c(t)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Berdasarkan Teorema 2.1 dan solusi Persamaan (2.11) dapat disusun matriks keterkontrolan ( $M_c$ ) sebagai berikut:

$$M_c = (\bar{B} | \bar{A}\bar{B} | \bar{A}^2\bar{B} | \bar{A}^3\bar{B})$$

Untuk matriks  $\bar{A}\bar{B}$  diperoleh:

$$\bar{A}\bar{B} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \\ 0 & Z_4 & Z_5 & 0 \\ 0 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ 0 & 0 & 0 & Z_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_2 & 0 \\ Z_4 & 0 \\ Z_6 & Z_8 \\ 0 & Z_9 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dengan memisalkan nilai dari perkalian matriks tersebut, sehingga diperoleh:

$$Z_2 = C_1 = \alpha_A p_{max} \bar{S} \left( \frac{1}{\bar{M} + M_{turn}} - \frac{\bar{M}}{(\bar{M} + M_{turn})^2} \right)$$

$$Z_4 = C_2 = \frac{-k_2 \alpha_A p_{max} \bar{S}}{\bar{M} + M_{turn}} + \frac{k_2 \alpha_A p_{max} \bar{M} \bar{S}}{(\bar{M} + M_{turn})^2}$$

$$Z_6 = C_3 = \frac{-k_3 \alpha_A p_{max} \bar{S}}{\bar{M} + M_{turn}} + \frac{k_3 \alpha_A p_{max} \bar{S}}{(\bar{M} + M_{turn})^2}$$

$$Z_8 = C_4 = \alpha_s$$

$$z_9 = c_5 = -k_1 \alpha_s$$

Untuk matriks  $\overline{A^2 B}$  diperoleh

$$\overline{A^2 B} = [\bar{A}][\overline{AB}]$$

$$\overline{A^2 B} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \\ 0 & Z_4 & Z_5 & 0 \\ 0 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ 0 & 0 & 0 & Z_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \\ C_3 & C_4 \\ 0 & C_5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^2 B} = \begin{bmatrix} Z_1 C_1 + Z_2 C_2 + Z_3 C_3 & Z_3 C_4 \\ Z_4 C_2 + Z_5 C_3 & Z_5 C_4 \\ Z_6 C_2 + Z_7 C_3 & Z_7 C_4 + Z_8 C_5 \\ 0 & Z_9 C_5 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Dengan memisalkan nilai dari perkalian matriks tersebut, sehingga diperoleh:

$$Z_1 C_1 + Z_2 C_2 + Z_3 C_3 = D_1$$

$$Z_4 C_2 + Z_5 C_3 = D_2$$

$$Z_6 C_2 + Z_7 C_3 = D_3$$

$$Z_3 C_4 = D_4$$

$$Z_5 C_4 = D_5$$

$$Z_7 C_4 + Z_8 C_5 = D_6$$

$$Z_9 C_5 = D_7$$

Untuk matriks  $\overline{A^3 B}$  diperoleh:

$$\overline{A^3 B} = [\bar{A}][\overline{A^2 B}]$$

$$\overline{A^3 B} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \\ 0 & Z_4 & Z_5 & 0 \\ 0 & Z_6 & Z_7 & Z_8 \\ 0 & 0 & 0 & Z_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_4 \\ D_2 & D_5 \\ D_3 & D_6 \\ 0 & D_7 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^3B} = \begin{bmatrix} Z_1D_1 + Z_2D_2 + Z_3D_3 & Z_1D_4 + Z_2D_5 + Z_3D_6 \\ Z_4D_2 + Z_5D_3 & Z_4D_5 + Z_5D_6 \\ Z_6D_2 + Z_7D_3 & Z_6D_5 + Z_7D_6 + Z_8D_7 \\ 0 & Z_9D_7 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Dengan memisalkan nilai dari hasil perkalian matriks diatas sehingga diperoleh:

$$Z_1D_1 + Z_2D_2 + Z_3D_3 = E_1$$

$$Z_4D_2 + Z_5D_3 = E_2$$

$$Z_6D_2 + Z_7D_3 = E_3$$

$$Z_1D_4 + Z_2D_5 + Z_3D_6 = E_4$$

$$Z_4D_5 + Z_5D_6 = E_5$$

$$Z_6D_5 + Z_7D_6 + Z_8D_7 = E_6$$

$$Z_9D_7 = E_7$$

Dari hasil perhitungan diatas maka Persamaan (4.19) – (4.22) dapat disusun menjadi matriks keterkontrolan  $M_c$  seperti berikut:

$$M_c = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & C_1 & 0 & D_1 & D_4 & E_1 & E_4 \\ 1 & 0 & C_2 & 0 & D_2 & D_5 & E_2 & E_5 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 & D_3 & D_6 & E_3 & E_6 \\ 0 & 1 & 0 & C_5 & 0 & D_7 & 0 & E_7 \end{array} \right]$$

Dengan didapatinya matriks keterkontrolan diatas dapat diamati bahwa  $\text{rank}(M_c) = 4$ . Dengan demikian sistem dinamik dari model pertumbuhan mikroalga bersifat terkontrol. Setelah mengetahui sistem dinamik dari model pertumbuhan alga, pada sub bab selanjutnya akan dibahas mengenai perancangan kendali LQR untuk kontrol optimal pada sistem dinamik pertumbuhan alga.

#### 4.5 Perancangan kendali LQR

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai perancangan kendali LQR untuk sistem dinamik pertumbuhan mikroalga. LQR merupakan sebuah sistem kendali yang terdiri atas sistem dan gain *feedback* sistem. Dengan memaksimumkan pertumbuhan alga sebagai fungsi objektif sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2} x^T P_c x + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt$$

$Q_c$  dan  $P_c$  adalah semi definit positif ( $Q_c \geq 0, P_c \geq 0$ ), sehingga  $Q_c$  dan  $P_c$  memiliki nilai eigen nonnegative dengan  $x^T Q_c x$  dan  $x^T P_c x$  tidak negative untuk semua  $x(t)$ . dan  $R_c$  merupakan matriks definit positif dimana  $R_c > 0$ , dengan kata lain mempunyai nilai eigen positif, sehingga  $u^T R_c u > 0$  untuk semua  $u(t) \neq 0$ .

$\frac{1}{2} x^T P_c x$  merupakan *final state* yang akan menjadi *cost optimal* yang bergantung pada pemilihan *quadratic performance index* yang berhubungan dengan kontrol.

Tahap selanjutnya adalah mencari gain *feedback* regulator. Hukum kendali dari sebuah sistem dapat ditulis:

$$u_c = -K_c x$$

$K_c$  merupakan nilai gain *feedback* regulator yang diperoleh dari persamaan:

$$K_c = R_c^{-1} B^T P_c$$

dengan  $P_c$  merupakan penyelesaian Riccati. Untuk menyelesaikan persamaan Ricatti, dibutuhkan terlebih dahulu nilai  $Q_c$  dan  $R_c$ . Nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  sendiri didapat dengan cara *trial and error*. Berikut ini merupakan algoritma dalam menentukan gain  $K_c$ :

1. Menentukan ukuran matriks dari  $R_c$  dan  $Q_c$
2. Menentukan nilai dari matriks  $R_c$ , kemudian menentukan nilai matriks  $Q_c$ .
3. Mencari nilai dari  $P_c$  melalui software *Matlab*.
4. Mencari gain  $K_c$
5. Simulasi sistem menggunakan software *Matlab*.

Berikut ini akan dilakukan formulasi kendali optimal.

Hal yang ingin dicapai dalam permasalahan ini adalah mendapatkan aliran nutrisi dan aliran karbondioksida yang optimal sehingga dapat memaksimalkan pertumbuhan alga. Secara matematika permasalahan ini adalah memaksimumkan fungsi objektif

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left( x^t Q x + R I_m^2(t) + R I_c^2(t) \right) dt$$

$I_m$  dan  $I_c$  adalah kendali optimal,  $R$  adalah elemen dari matriks bobot kontrol.

Langkah pertama adalah membentuk Persamaan Hamiltonian dari fungsi objektif, sehingga didapat:

$$\begin{aligned} H(A, M, S, C, I_m, I_c, \lambda) &= x^t Q x + R I_m^2(t) + R I_c^2(t) \\ &+ \sum_{i=1}^4 \lambda_i (A x + B u) \\ &= x^t Q x + R I_m^2(t) + R I_c^2(t) + \lambda_1(t) \left[ \alpha_a \left( p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S \right. \\ &\quad \left. - (D_r + h_r) A \right] \\ &\quad + \lambda_2(t) \left[ -k_2 \alpha_A \left( p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S + i_m(t) \right] \\ &\quad + \lambda_3(t) \left[ \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r \right. \\ &\quad \left. + h_r) S \right] + \lambda_4(t) \left[ -k_1 \alpha_s C + i_c(t) \right] \end{aligned}$$

Kemudian mencari state didapat:



$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \alpha_a(p_{\max} \frac{M}{M + M_{\text{turn}}})S - (D_r + h_r)A]$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -k_2 \alpha_A(p_{\max} \frac{M}{M + M_{\text{turn}}})S + i_m(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A(p_{\max} \frac{M}{M + M_{\text{turn}}})S - (D_r + h_r)S$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = -k_1 \alpha_s C + i_c(t)$$

Kemudian dicari *co-state* didapat:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A} = (D_r + h_r)\lambda_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial M} \\ &= -\left[ (\alpha_A p_{\max} S \lambda_1) \left( \frac{M + M_{\text{turn}} - M}{(M + M_{\text{turn}})^2} \right) \right. \\ &\quad - (k_2 \alpha_A p_{\max} S \lambda_2) \left( \frac{M + M_{\text{turn}} - M}{(M + M_{\text{turn}})^2} \right) \\ &\quad \left. - (k_3 \alpha_A p_{\max} S \lambda_3) \left( \frac{M + M_{\text{turn}} - M}{(M + M_{\text{turn}})^2} \right) \right] \\ &= \frac{\alpha_A p_{\max} S}{(M + M_{\text{turn}})} (-\lambda_1 + k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3) + \frac{\alpha_A p_{\max} M S}{(M + M_{\text{turn}})} (\lambda_1 \\ &\quad - k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3) \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ \alpha_A \left( p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) \lambda_1 - k_2 \alpha_A \left( p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) \lambda_2 \right. \\
&\quad \left. - k_3 \alpha_A \left( p_{max} \frac{M}{M + M_{turn}} \right) \lambda_3 - (D_r + h_r) \lambda_3 \right] \\
&= \left( \frac{\alpha_A p_{max} M}{M + M_{turn}} \right) (-\lambda_1 + k_2 \lambda_2 + k_3 \lambda_3) + (D_r + h_r) \lambda_3 \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial C} \\
&= -[\alpha_s \lambda_3 - k_1 \alpha_s \lambda_4]
\end{aligned}$$

Selanjutnya adalah menentukan kondisi stasioner untuk mendapatkan persamaan kontrol optimal, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial I_m(t)} &= 0 \\
0 &= RI_m(t) + \lambda_2(t) \\
I_m(t) &= -R^{-1} \lambda_2(t) \\
\frac{\partial H}{\partial I_c(t)} &= 0 \\
0 &= RI_c(t) + \lambda_4(t) \\
I_c(t) &= -R^{-1} \lambda_4(t)
\end{aligned}$$

Dengan nilai batas  $0 < I_m(t) \leq 4.2$  dan  $0 < I_c(t) \leq 4$

Untuk mencari  $\lambda(t)$  digunakan persamaan Riccati menggunakan software matlab.

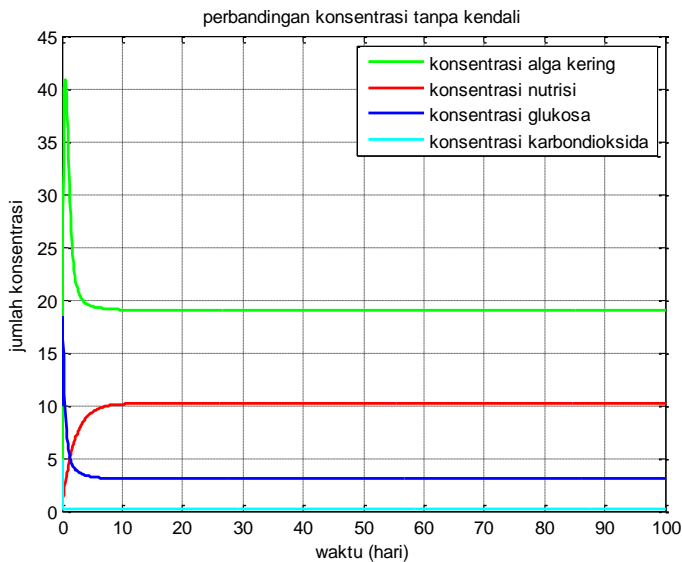
Setelah mengetahui perancangan LQR untuk kontrol optimal, pada sub bab selanjutnya akan dilakukan simulasi dari sistem dinamik partumbuhan alga menggunakan software *Matlab*.

## 4.6 Simulasi dan Analisis Hasil Kontrol

Pada bab ini akan dilakukan simulasi sistem dinamik dari model pertumbuhan alga menggunakan software *Matlab*. Kemudian akan dilakukan analisis dari hasil simulasi sistem yang akan dijelaskan di sub bab berikutnya.

### 4.6.1. Hasil Simulasi Sebelum Diberi Kendali

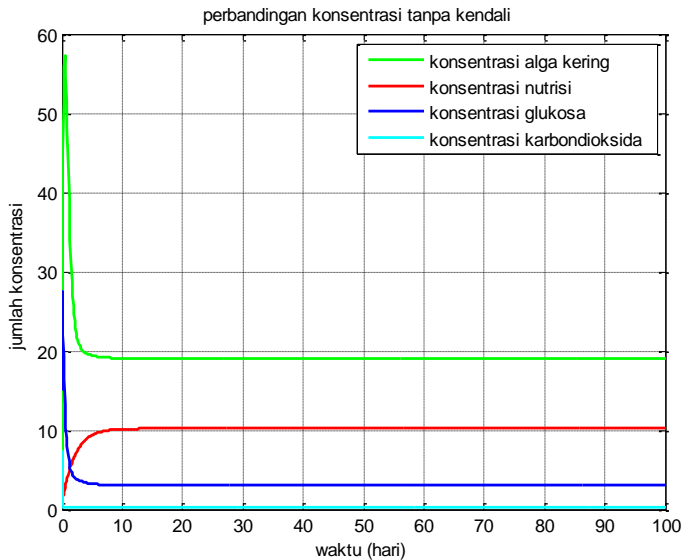
Dalam sub bab ini dilakukan simulasi pada sistem dinamik pada model pertumbuhan alga dengan kondisi awal yang sudah diberikan sebelum dilakukan kontrol optimal sebagai berikut:



**Gambar 4. 1** Perubahan jumlah konsentrasi pada pertumbuhan alga dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$

Dari Gambar 4.1, dengan kondisi awal konsentrasi alga kering  $= 3 \text{ g}[A]m^{-3}$ , konsentrasi awal nutrisi  $= 0.4 \text{ g}[M]m^{-3}$ , konsentrasi awal glukosa  $= 10 \text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ , konsentrasi awal karbondioksida  $=$

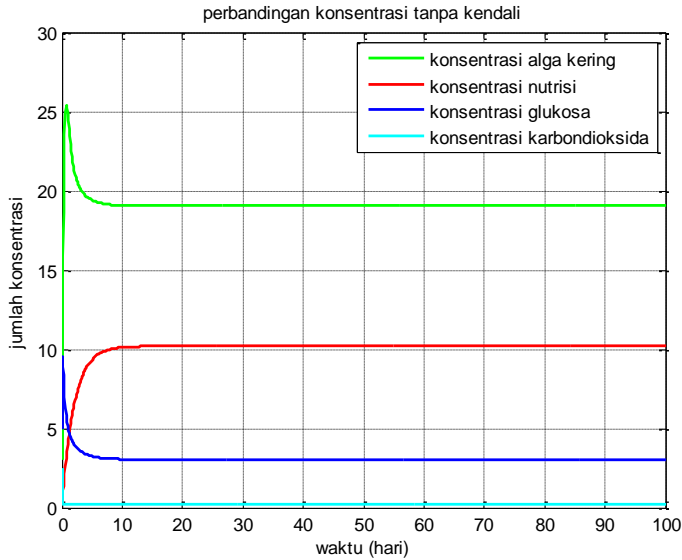
$5\text{ g}[CO_2]m^{-3}$ , konsentrasi alga meningkat pada hari pertama mencapai  $40.8332\text{ g}[A]m^{-3}$ , setelah itu mengalami penurunan mencapai  $19.074\text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke-10, setelah itu pertumbuhan alga stabil pada jumlah  $19.074\text{ g}[A]m^{-3}$ . Konsentrasi nutrisi meningkat hingga mencapai  $10.1939\text{ g}[M]m^{-3}$  dari kondisi awal sebesar  $0.4\text{ g}[M]m^{-3}$ , peningkatan ini terjadi hingga hari ke-30 setelah itu peningkatan konsentrasi nutrisi stabil sebesar  $10.1939\text{ g}[M]m^{-3}$ . Sementara itu konsentrasi glukosa mengalami penurunan konsentrasi pada hari ke-8 sebesar  $3\text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ , namun sebelum terjadi penurunan adanya peningkatan konsentrasi sebesar  $18.4\text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ . Konsentrasi karbondioksida tidak mengalami peningkatan justru mengalami penurunan hingga mencapai  $0.185\text{ g}[CO_2]m^{-3}$  hingga pada hari ke-100 dalam pengamatan.



**Gambar 4. 2** Perubahan jumlah konsentrasi pada pertumbuhan alga dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$

Dari Gambar 4.2 dengan kondisi awal konsentrasi alga kering  $= 3 \text{ g}[A]m^{-3}$ , konsentrasi awal nutrisi  $= 0.6 \text{ g}[M]m^{-3}$ , konsentrasi awal glukosa  $= 15 \text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ , konsentrasi awal karbondioksida  $= 5 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$ , terjadi peningkatan konsentrasi alga sebesar  $57.29 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari pertama, kemudian mengalami penurunan mencapai  $19.074 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke-10 kemudian jumlah konsentrasi alga berada pada jumlah yang stabil dihari berikutnya. Jumlah konsentrasi nutrisi terjadi peningkatan mencapai  $= 10. \text{ g}[M]m^{-3}$  hingga hari ke-30, setelah itu jumlah konsentrasi nutrisi stabil hingga hari ke-100 dalam pengamatan. Jumlah konsentrasi glukosa mengalami peningkatan pada hari pertama mencapai  $= 27.373 \text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ , kemudian mengalami penurunan mencapai  $= 3.1 \text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ .

Sementara itu konsentrasi karbondioksida mengalami penurunan mencapai  $0.185 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$ .



**Gambar 4. 3** Perubahan jumlah konsentrasi pada pertumbuhan alga dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$

Dari Gambar 4.3 dengan kondisi awal yang diberikan sesuai gambar, diperoleh hasil jumlah konsentrasi alga kering sebesar  $25.35 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari pertama lalu terjadi penurunan konsentrasi sebesar  $19.1 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke-10. Jumlah konsentrasi nutrisi terjadi peningkatan mencapai  $10. \text{g}[M]m^{-3}$  hingga hari ke-30, setelah itu jumlah konsentrasi nutrisi stabil hingga hari ke-100 dalam pengamatan. Jumlah konsentrasi glukosa mengalami peningkatan pada hari pertama mencapai  $27.373 \text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ , kemudian mengalami penurunan mencapai  $3.1 \text{ g}[(CH_2O)_6]m^{-3}$ . Sementara itu konsentrasi

karbondioksida mengalami penurunan mencapai  $0.185 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$ .

Dari ketiga Gambar diatas, selalu terjadi kenaikan jumlah konsentrasi alga kering, tetapi setelah peningkatan terjadi penurunan kemudian stabil dititik akhir penurunan jumlah konsentrasi alga kering. Peningkatan jumlah alga kering tanpa kendali bergantung pada pemberian awal konsentrasi nutrisi, glukosa, dan karbondioksida. Jika konsentrasi awal yang diberikan untuk nutrisi dan karbondioksida semakin besar, maka akan terjadi peningkatan jumlah konsentrasi alga kering, tetapi untuk karbondioksida selalu mengalami penurunan mencapai  $0.185 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$  dari kondisi awal dikarenakan proses fotosintesis yang menyebabkan karbondioksida menjadi glukosa.

Pada sub bab selanjutnya akan dilakukan simulasi dengan diberikan kendali dan akan dibandingkan hasil dari simulasi kendali dengan tanpa kendali.

#### 4.6.2. Hasil Simulasi Setelah Diberi Kendali

Pada Sub bab ini akan dijelaskan mengenai hasil simulasi sistem dinamik dari model pertumbuhan alga menggunakan software *Matlab* setelah dilakukan kontrol optimal.

Sebelum melakukan kontrol optimal pada sistem dinamik model pertumbuhan alga, dilakukan terlebih dahulu pencarian matriks  $Q_c$  dan  $R_c$  menggunakan software *Matlab* dengan cara *trial and error* sehingga diperoleh matriks  $Q_c$  dan  $R_c$  yang membuat sistem yang optimal adalah:

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}$$

dan

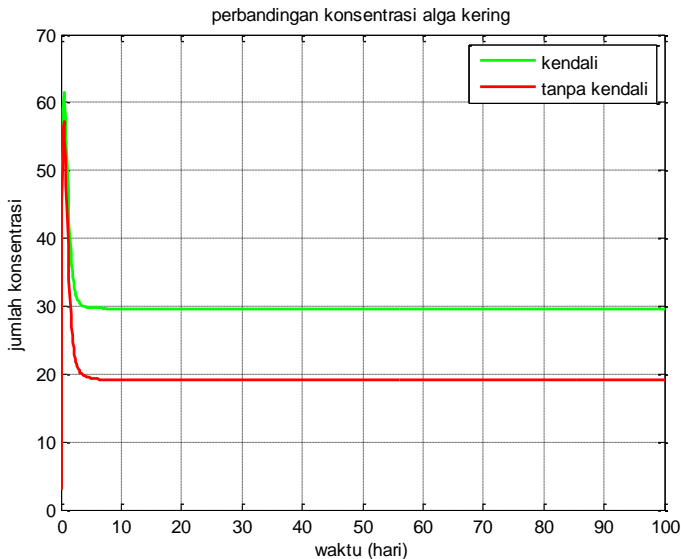
$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai  $P_c$  menggunakan Persamaan Ricatti dengan bantuan *Matlab*, diperoleh nilai matriks

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0.0009 \\ 0 & 0.2787 & -0.0003 & -0.0008 \\ 0.0004 & -0.0003 & 0.0019 & 0.0046 \\ 0.0009 & -0.0008 & 0.0046 & 0.0290 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat nilai gain regulator adalah:

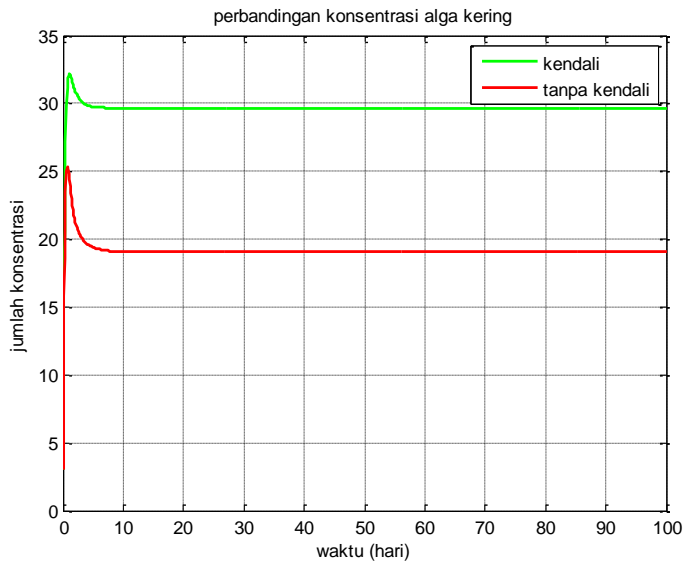
$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.2787 & -0.0003 & -0.0008 \\ 0.0009 & -0.0008 & 0.0046 & 0.0290 \end{bmatrix}$$



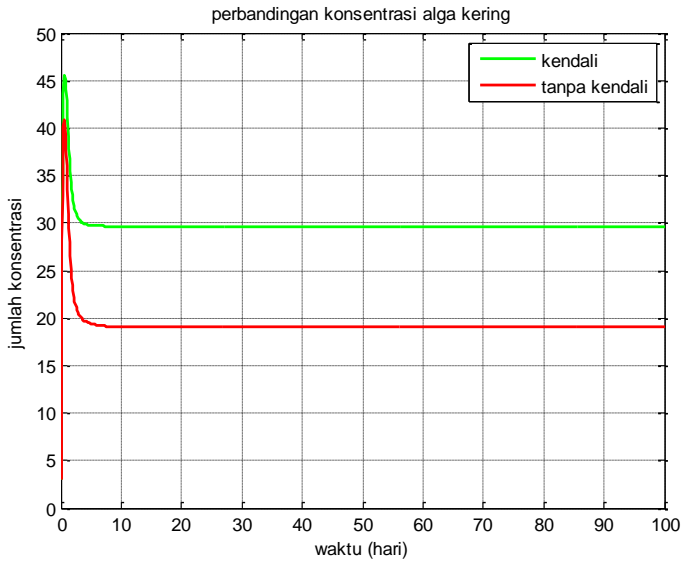
**Gambar 4. 4** Perubahan jumlah konsentrasi alga kering dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$



Pada gambar 4.4 dapat dilihat bahwa jumlah konsentrasi alga mengalami peningkatan sebesar  $61.5 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  setelah dilakukan kontrol optimal, kemudian mengalami penurunan mencapai  $29.8 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  hingga hari ke 8 dan mengalami jumlah konsentrasi yang stabil pada  $29.8 \text{ g}[A]\text{m}^{-3}$  hingga hari ke-100 dalam pengamatan. Dengan kata lain jumlah konsentrasi alga kering meningkat sebesar 7.32% dari jumlah awal.



**Gambar 4. 5** Perubahan jumlah konsentrasi alga kering dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$

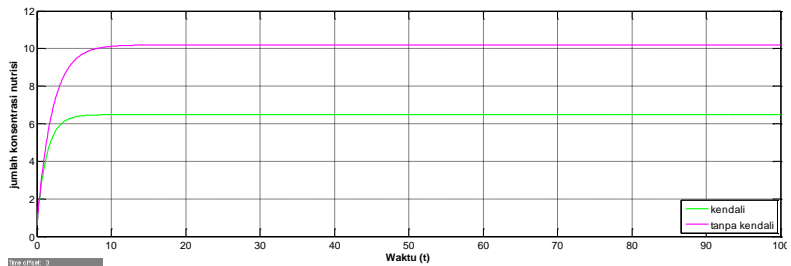


**Gambar 4. 6** Perubahan jumlah alga kering dengan dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$

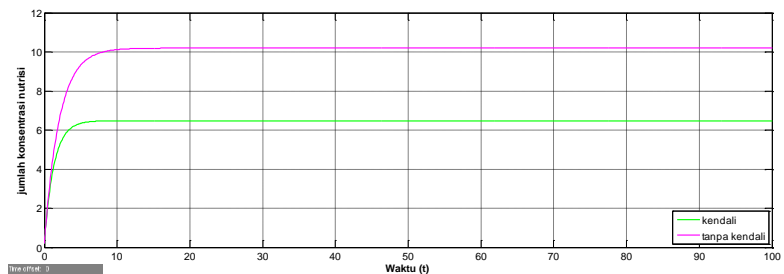
Pada gambar 4.5 dan 4.6 terjadi peningkatan pada jumlah konsentrasi alga kering dengan matriks bobot  $R_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Untuk kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$  jumlah alga kering meningkat sebesar  $32.2 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari pertama, setelah itu mengalami penurunan mencapai  $29.7 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke-7 dalam pengamatan, sementara itu pada gambar 4.6 terjadi peningkatan konsentrasi alga kering sebesar  $45.53 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari pertama, kemudian mengalami penurunan mencapai  $29.72 \text{ g}[A]m^{-3}$  pada hari ke-7 dan stabil pada jumlah konsentrasi  $29.72 \text{ g}[A]m^{-3}$  hingga hari ke-100 pengamatan.

Pada kasus ini dari ketiga hasil yang dikontrol setelah disimulasi, semua jumlah konsentrasi alga kering pada hari pertama mengalami peningkatan, namun peningkatan paling besar

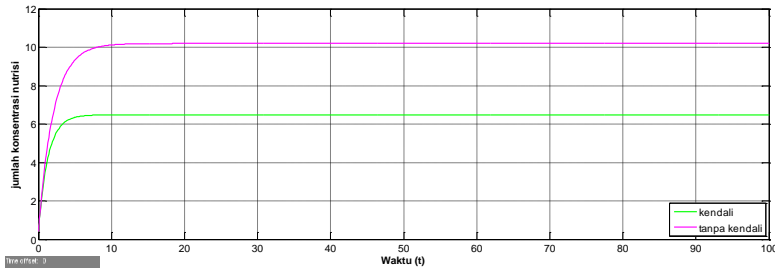
terjadi ketika kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$ . Akan tetapi dari ketiga hasil dengan kondisi awal yang berbeda mengalami penurunan rata-rata pada hari ke-7 dengan jumlah konsentrasi alga kering mencapai  $29.72 \text{ g}[A]m^{-3}$  dan mengalami jumlah yang stabil setelah hari ke-7 hingga hari ke-100 pengamatan.



**Gambar 4. 7** Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$

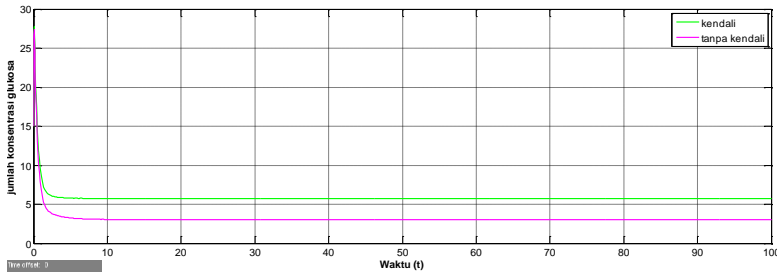


**Gambar 4. 8** Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$



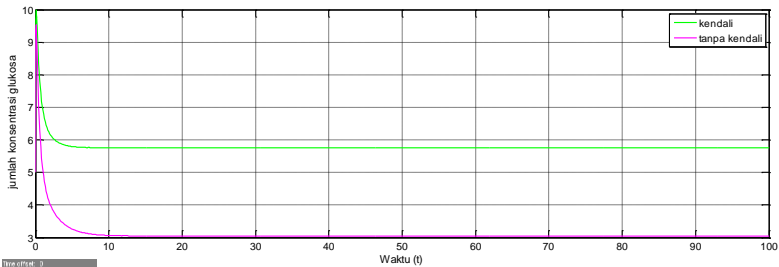
**Gambar 4. 9** Perubahan jumlah konsentrasi nutrisi dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$

Pada gambar 4.7-4.9 dapat diamati bahwa konsentrasi nutrisi meningkat pada hari ke-10 sebesar  $6.48 \text{ g}[M]m^{-3}$  setelah itu konsentrasi nutrisi stabil hingga hari ke-100 sebesar  $6.48 \text{ g}[M]m^{-3}$  dengan kondisi awal yang berbeda.



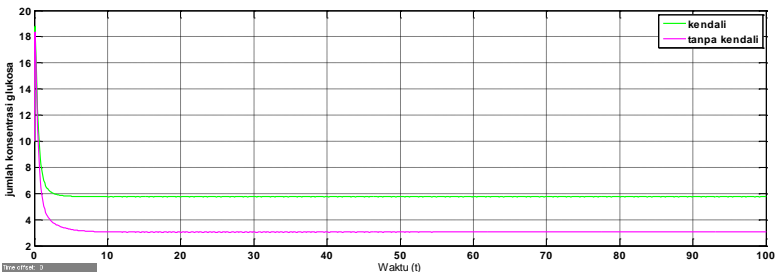
**Gambar 4. 10** Perubahan jumlah konsentrasi glukosa dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$

Gambar 4.10 menunjukkan peningkatan jumlah setelah dilakukan kontrol dimana konsentrasi glukosa pada hari pertama sebesar  $27.74 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]m^{-3}$ , kemudian mengalami penurunan hingga hari ke-6 mencapai  $5.8 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]m^{-3}$ , setelah itu jumlah konsentrasi stabil pada jumlah  $5.8 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]m^{-3}$  hingga hari ke-100 dalam pengamatan.



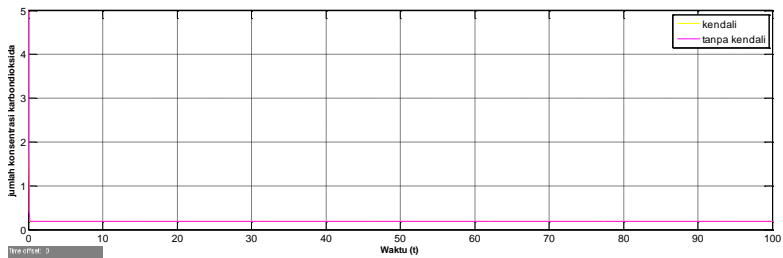
**Gambar 4. 11** Perubahan jumlah konsentrasi glukosa dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$

Pada gambar 4.11 perubahan jumlah glukosa setelah dikontrol mengalami peningkatan sebesar  $9.985 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]\text{m}^{-3}$  pada hari pertama, kemudian mengalami penurunan jumlah konsentrasi hingga hari ke-6 sebesar  $5.8 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]\text{m}^{-3}$  dan stabil pada jumlah  $5.8 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]\text{m}^{-3}$  hingga hari ke-100 pengamatan.

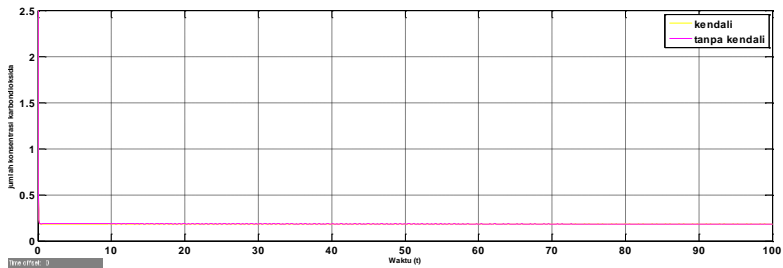


**Gambar 4. 12** Perubahan jumlah konsentrasi glukosa dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$

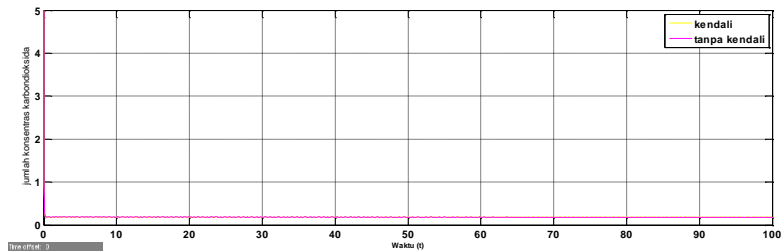
Pada gambar 4.12 konsentrasi glukosa meningkat pada hari pertama mencapai  $18.8 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]\text{m}^{-3}$ , setelah itu terjadi penurunan jumlah hingga hari ke-6 sebesar  $5.8 \text{ g}[(\text{CH}_2\text{O})_6]\text{m}^{-3}$  dan stabil pada jumlah tersebut hingga hari ke-100 dalam pengamatan. Secara keseluruhan dari gambar 4.10-4.12 konsentrasi glukosa akan selalu menurun setelah diberikan kontrol. Hal ini dikarenakan konsentraasi glukosa digunakan sebagai sumber energi dalam pembentukan alga baru.



**Gambar 4. 13** Perubahan jumlah konsentrasi karbondioksida dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$



**Gambar 4. 14** Perubahan jumlah konsentrasi karbondioksida dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$

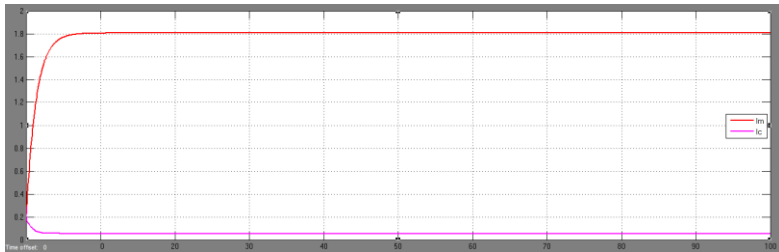


**Gambar 4. 15** Perubahan jumlah konsentrasi karbondioksida dengan kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.4, 10, 5)$

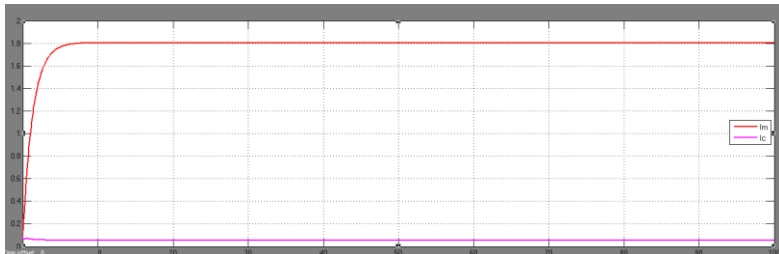
Dari gambar 4.13 – 4.15 dengan kondisi awal yang berbeda setelah dilakukan kontrol konsentrasi karbondioksida selalu

mengalami penurunan sama seperti konsentrasi karbondioksida tanpa kendali, konsentrasi karbondioksida mengalami penurunan mendekati  $0.1479 \text{ g}[CO_2]m^{-3}$ . Penurunan ini terjadi karena karbondioksida yang terbentuk melalui proses terang dan gelap akan membentuk glukosa untuk dijadikan energi dalam pembentukan alga baru dan proses fotosintesis.

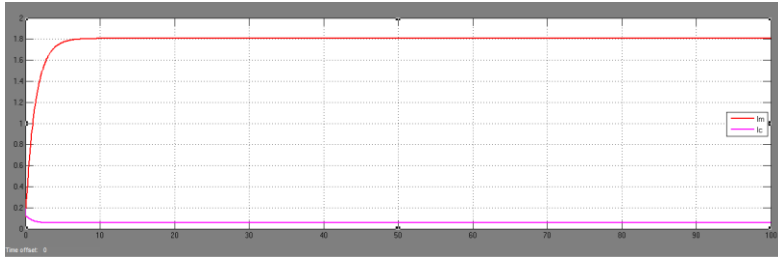
Berikut ini akan ditampilkan



**Gambar 4. 16** Aliran nutrisi dan aliran karbondioksida kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$



**Gambar 4. 17** aliran nutrisi dan aliran karbondioksida kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$



**Gambar 4. 18** aliran nutrisi dan aliran karbondioksida kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.2, 5, 2.5)$

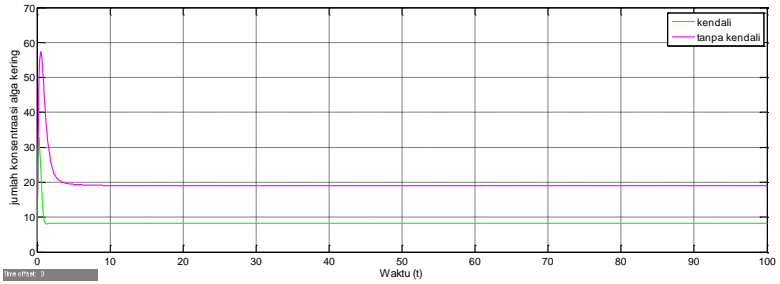
Setelah dilakukan kontrol pada sistem, terjadi peningkatan pada aliran nutrisi setelah dilakukan kontrol. Dengan kondisi awal yang berbeda aliran nutrisi meningkat hingga hari ke 10 sebesar  $1.8 \text{ g}[M]m^{-3}$  sehingga jumlah konsentrasi alga meningkat karena adanya peningkatan nutrisi. Sedangkan aliran karbondioksida mengalami penurunan karena aliran karbondioksida digunakan untuk proses pembentukan glukosa, semakin banyak aliran karbondioksida yang digunakan untuk pembentukan glukosa maka jumlah konsentrasi juga akan semakin meningkat. Pada bahasan selanjutnya akan dilakukan *trial and error* untuk melihat pengaruh perubahan matriks  $R_c$  pada sistem.

#### 4.7 Pengaruh Perubahan Matriks $R_c$ Pada Sistem

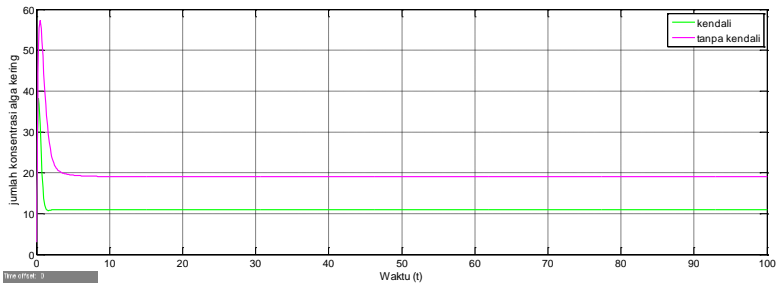
Pada sub bab bagian ini akan ditunjukkan perilaku setiap grafik melalui nilai elemen matriks bobot  $R_c$ . Dengan nilai matriks elemen bobot  $0.1 \leq R_c \leq 1$ .

Di dalam menentukan hasil yang optimal, di sub bab ini akan dilakukan *trial and error* dengan memilih kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0) = (3, 0.6, 15, 7.5)$  untuk dilakukan simulasi *trial and error* menggunakan software *Matlab*.

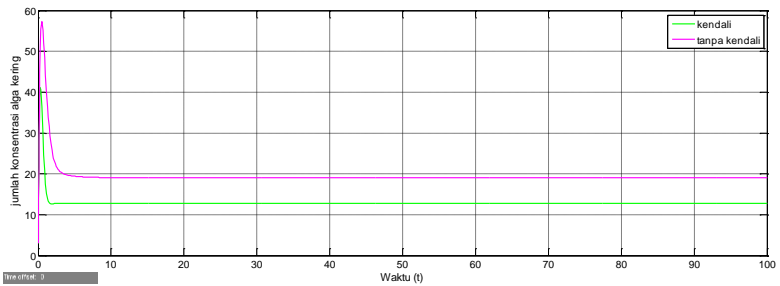




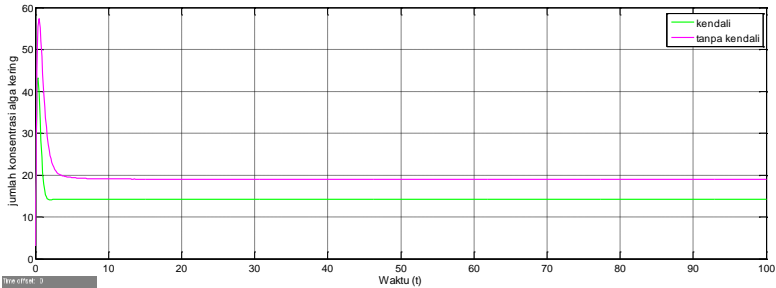
**Gambar 4. 19** jumlah konsentrasi alga kering



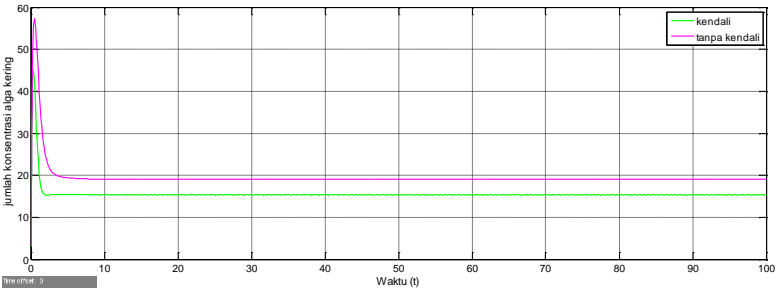
**Gambar 4. 20** jumlah konsentrasi alga kering



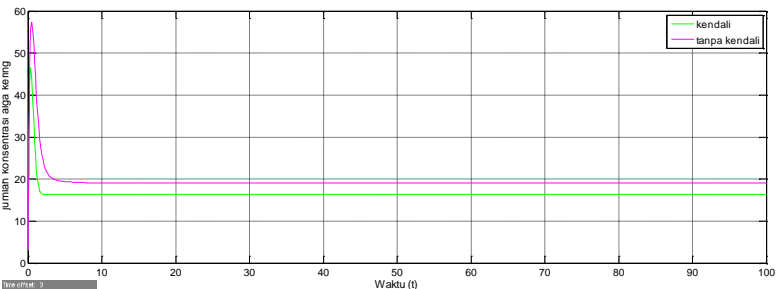
**Gambar 4. 21** jumlah konsentrasi alga kering



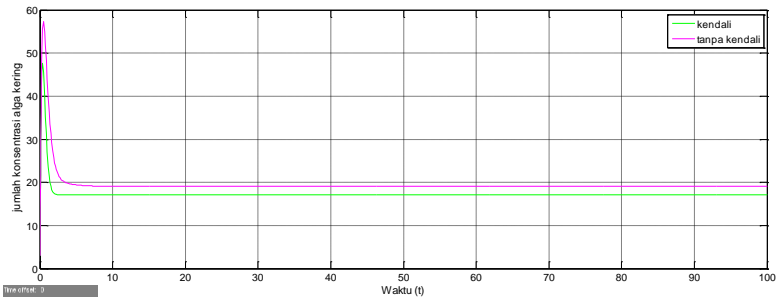
Gambar 4. 22 jumlah konsentrasi alga kering



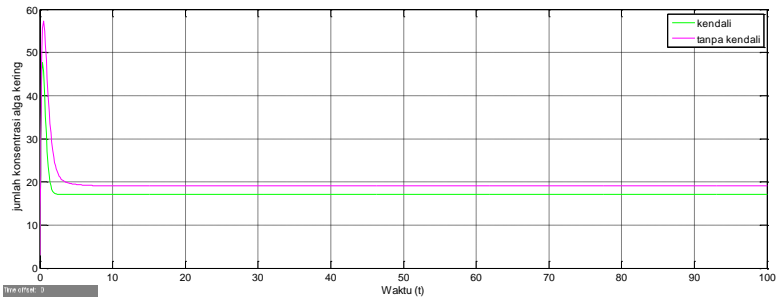
Gambar 4. 23 jumlah konsentrasi alga kering



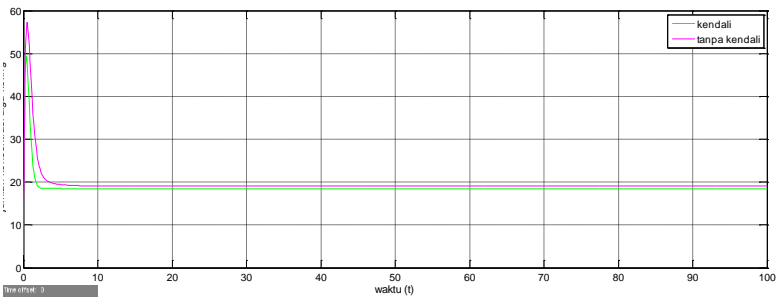
Gambar 4. 24 jumlah konsentrasi alga kering



**Gambar 4. 25** jumlah konsentrasi alga kering



**Gambar 4. 26** jumlah konsentrasi alga kering



**Gambar 4. 27** jumlah konsentrasi alga kering

Dari gambar diatas dengan memulai *trial* and *error* dengan pemilihan matriks  $R_c$  dengan  $0.1 \leq R_c \leq 0.9$  didapati bahwa semakin besar nilai  $R_c$  maka nilai dari matriks  $P_c$  akan semakin kecil, sehingga hasil simulasi dari konsentrasi alga kering akan

semakin meningkat yang ditunjukkan pada gambar 4.16 – 4.17. hasil simulasi yang ditunjukkan pada gambar 4.16 – 4.17 dilakukan dengan pemilihan nilai matriks  $R_c$  secara urut atau dinotasikan  $0.1 \leq R_c \leq 0.9$

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan pada Bab IV, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Sistem dinamik pada model pertumbuhan alga Thornton bersifat stabil dan terkontrol. Didapat titik kesetimbangannya adalah

$$E = (\bar{A}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{C}) = (1.6260; 1.7095; 3.9837; 0.1479)$$

2. Untuk mendapatkan hasil yang optimal dalam meningkatkan pertumbuhan alga menggunakan metode LQR, didapat matriks bobot keadaan  $Q_c$ , matriks bobot kontrol  $R_c$ , dan gain regulator dengan nilai masing-masing:

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}$$

$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.2787 & -0.0003 & -0.0008 \\ 0.0009 & -0.0008 & 0.0046 & 0.0290 \end{bmatrix}$$

3. Berdasarkan kondisi awal yang diberikan, hasil simulasi dengan peningkatan paling besar pada hari pertama setelah dilakukan kendali dan tanpa kendali adalah ketika  $A^0, M^0, S^0, C^0 = 3, 0.6, 15, 7.5$ . setelah mengalami peningkatan pada hari pertama setelah dikontrol, pada semua kondisi awal yang diberikan rata-rata mengalami penurunan pada hari ke 7 sebesar  $29.7 g[A]m^{-3}$ .
4. Hasil simulasi paling besar adalah ketika nilai matriks bobot kontrol  $R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Jika nilai matriks bobot

kontrol semakin kecil, maka tujuan dari mengoptimalkan pertumbuhan alga tidak akan tercapai.

5. Dari kedua kontrol yaitu aliran nutrisi dan aliran karbondioksida, didapati bahwa keduanya saling mempengaruhi dalam pertumbuhan alga. Semakin banyak  $CO_2$  yang terpakai untuk membentuk glukosa sebagai sumber nutrisi, pertumbuhan alga akan semakin meningkat sehingga dapat digunakan sebagai salah satu sumber energi.

## 5.2. Saran

Adapun saran dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Pada penelitian selanjutnya dapat digunakan metode *Norm-bounded Linear Differential Inclusions* (NLDIs) untuk *men-design* kontrol LQR.
2. Dapat dikembangkan dengan model yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

- 1) Amini, S. & Susilowati, Rini. (2010), *Produksi biodiesel dari mikroalga Botryococcus braunii*. Peneliti pada balai besar riset pengolahan produk dan bioteknologi kelautan dan perikanan.
- 2) Hajar. (2015). 'Kendali Karbon Dioksida Pada Model Pertumbuhan Alga'. Thesis Jurusan Matematika ITS : Surabaya.
- 3) Hossain, A.B.M, Salleh, A.,Boyce, A.N.,Chowdhury, P.,Naquiuddin, M. (2008), "*Biodiesel fuel production from algae as renewable energy*". American journal of biochemistry and biotechnology.
- 4) Faradilla,A & Juwita,A.R. (2012), *Pemanfaatan Air Limbah Pabrik Pupuk Kadar Amonia Tinggi Sebagai Media Kultur Mikroalga Untuk Perolehan Sumber Minyak Nabati Sebagai Bahan Bakar Biodiesel*. Jurusan Teknik Kimia Fakultas Teknik-Universitas Dipenogoro, Semarang.
- 5) Thornton, A., dkk. (2010), "*Modelling and Optimization of Algae Growth*".ISSN : 0926-4507.
- 6) Kawaroe ,M., Pratono, T., Sunuddin, A., Sari , D.W., Agustine , D. (2010). "*Mikroalga Potensi dan Pemanfaatannya Untuk Produksi Bio Bahan Bakar*". IPB Press, Bogor.
- 7) Stanislaw, H. Zak. (2003). "*Systems and Control*",Oxford University Press.
- 8) Subiono (2013), *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.
- 9) Lewis, Frank L. (1992). "*Applied Optimal Control & Estimation Digital Design & Implementation.*" The University of Texas : Arlington

- 10) Fatkhunur, Fariza R. (2017). “*Kontrol Optimal Pada Model Ekstraksi Lipid Mikroalga Menggunakan Metode LQR*”. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS , Surabaya.
- 11) Monalisa S, Sriati. (2016). “Pemodelan Perpindahan Massa Pada Ekstraksi Lipid Kontinu Mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan Pelarut CXM ( $CO_2$ -Expanded Methanol). Tugas Akhir jurusan Matematika ITS, Surabaya
- 12) Mardlijah & Izzati. (2015). “Optimal Feeding Strategy on Microalgae Growth in Fed-Batch Bioreactor Model”. International Journal Of Computing Science and Applied Mathematics , Vol . 1 No. 1. Institut Teknologi Sepuluh Nopember , Surabaya
- 13) Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. USA: Departement of Mathematics Nothern Arizona University
- 14) Madlijah,Jamil,A. Hanafi,L. Sanjaya,S. (2017). “Optimal Control of Growth by Controlling  $CO_2$  and Nutrition Flow using Pontryagin Maximum Principle”. International Journal Of Computing Science and Applied Mathematics. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- 15) Purnawan,H. Mardlijah. Purwanto,Eko Budi. (2017). “Design Of Linear Quadratic Regulator (LQR) Control System For Flight Stability Of LSU-05”. Journal of Physics:Confrence Series, Vol. 890.



## LAMPIRAN A

Source code

```
clc;

alpha_a = 10.2;
p_max=0.4;
Dr=0.46;
h0=2;
Mturn=4;
alpha_s=67.6;
k1=0.4;
k2=0.05;
k3=0.05;
M=0.084;
S=10;

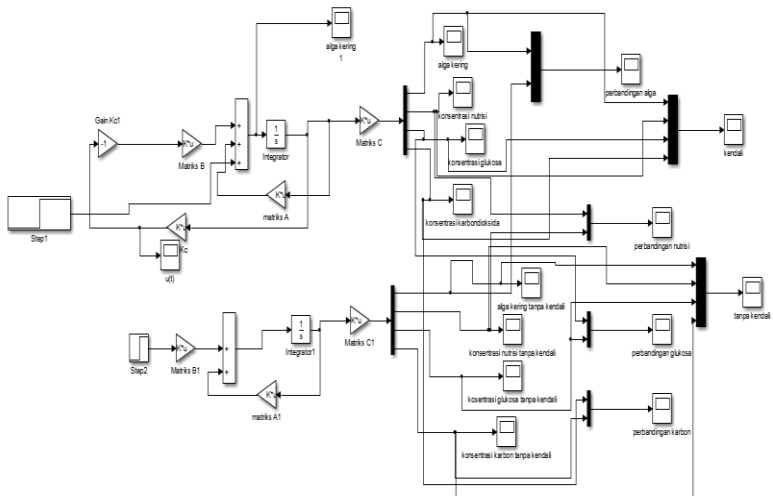
z1 = -(Dr+h0);
z2= alpha_a*p_max*S*( (1/(M+Mturn)) -
((alpha_a*p_max*S*M)/(M+Mturn)^2) );
z3 = ((alpha_a*p_max*S)/(M+Mturn));
z4= ( (-
k2*alpha_a*p_max*S)/(M+Mturn) ) + ( (k2*alpha_a*p_ma
x*M*S)/(M+Mturn)^2 );
z5= (-k2*alpha_a*p_max*M)/(M+Mturn);
z6= ( (-
k3*alpha_a*p_max*S)/(M+Mturn) ) + ( (k3*alpha_a*p_ma
x*M*S)/(M+Mturn)^2 );
z7= ( (-k3*alpha_a*p_max*M)/(M+Mturn) ) - (Dr+h0);
z8=alpha_s;
z9= (-k1)*alpha_s;

a = [z1 z2 z3 0;0 z4 z5 0;0 z6 z7 z8;0 0 0 z9];
b = [0 0;1 0;0 0;0 1]
c = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]

g = [b a*b a^2*b a^3*b]
rank (g)
```

```
%Gain Regulator
Qc = [0.0010 0 0 0;0 0.35 0 0; 0 0 0.0010    0;0
0 0 0.95]
Rc = [1 0;0 1]
%Qc = [1000 0;0 1000]
%Rc = [1]
%ricati
Pc=are(a,b*inv(Rc)*b',c'*Qc*c)
%gain Kc
Kc=inv(Rc)*b'*Pc
```

## LAMPIRAN B DESIGN SIMULINK



***“Halaman ini sengaja dikosongkan”***

## LAMPIRAN C

### Daftar Satuan

Parameter		Satuan
$\alpha_A$	Konstanta pertumbuhan biomassa	$g[A] \ g[M]^{-1} g[(CH_2O)_6]^{-1} day^{-1}$
$p_{max}$	Konsentrasi nutrisi dalam sel jenuh	$g[M]m^{-3}$
$D_r$	Tingkat kematian mikroalga	$day^{-1}$
$h_r$	Tingkat panen mikroalga	$day^{-1}$
$M_{Turn}$	Konsentrasi nutrisi setengah jenuh diperoleh ketika nutrisi diluar	$g[M]m^{-3}$
$I_m$	Aliran masuk nutrisi	$g[M]m^{-3}$
$\alpha_s$	Konstanta fotosintesis	$g[(CH_2O)_6]g[(CO_2)]^{-1} day^{-1}$
$k_1$	tingkat perubahan $CO_2$ menjadi $(CH_2O)_6$	$g[(CO_2)]g[(CH_2O)_6]^{-1}$

$k_2$	Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga kering	$g[M]g[A]^{-1}$
$k_3$	Tingkat perubahan $(CH_2O)_6$ menjadi mikroalga kering	$g[(CH_2O)_6]g[A]^{-1}$
$I_c$	aliran masuk karbondioksida	$g[(CO_2)m^{-3}]$
$A$	Konsentrasi mikroalga kering	$g[A]m^{-3}$
$M$	Konsentrasi nutrisi	$g[M]m^{-3}$
$S$	Konsentrasi Glukosa	$g[(CH_2O)_6]m^{-3}$
$C$	Konsentrasi Karbondioksida	$g[CO_2]m^{-3}$

## BIODATA



Penulis yang mempunyai nama lengkap Yoshua Ardy Putra lahir di Bogor pada tanggal 9 Nopember 1994. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, dari Bapak Suhardi dan Ibu Rusmini. Penulis telah menempuh pendidikan formal dari SD Kristen Kanaan Cianjur, SMP Kristen Kanaan Cianjur, dan SMA Negeri 1 Cianjur. Setelah menyelesaikan pendidikan formal, penulis melanjutkan studi S1 di jurusan

Matematika ITS dengan NRP 1213100114 dan selama kuliah penulis juga pernah aktif dalam organisasi kampus dan organisasi kerohanian. Untuk kritik, saran dan pertanyaan tentang Tugas Akhis dapat menghubungi alamat email [yoshuaap@gmail.com](mailto:yoshuaap@gmail.com)